

(53) 多層地盤におけるグリーン関数の数値計算法

岡山大学 学生員 有岡 謙一
岡山大学 正会員 竹宮 宏和
岡山大学 学生員 渡辺 和明

1. まえがき

本論文では地盤と構造物の相互作用解析において重要となるグリーン関数の評価を集中加振だけでなく、層内一様加振に対する計算方法を展開する。対象地盤は平面歪状態の粘弾性半無限層状地盤であり、波動場としては面内波(P-SV波)を取り扱っている。

基本的には、波数領域における剛性行列表示と波数積分表示を用いている。数値計算においては、剛性行列要素の桁落ち、オーバーフローの問題と波数積分における区間分割、無限積分の処理方法について述べる。そして最後に、数値計算例によって本計算方法の妥当性を検証した。

2. 定式化

(1) 基本式 時間的には調和振動問題 $\exp(i\omega t)$ を考える。ここに ω は角振動数である。粘弾性体に対する波動方程式に変位ポテンシャルを導入し、 x 軸方向 (Fig.1) に波数 k で Fourier 変換を施すと波数積分表示の一般解が得られる。加振源が集中加振または鉛直面に作用する一様分布加振の場合、求められた変位ポテンシャルから変位と応力は次式のように表せる。

$$[u, w, \tau_{xz}, \sigma_{zz}]^T = \int_{-\infty}^{\infty} [U, W, T, \Sigma]^T \exp[ik(x-\xi)] dk \quad (1)$$

ここで、 $\{S(z)\} = [U, W, T, \Sigma]^T$ とおくと $\{S(z)\}$

は波数領域における変位-応力ベクトルである。

第 m 層内の $\{S(z)\}$ は次式で表せる。

$$\{S(z)\} = [Q(m)][E(z-z_{m-1})]\{C(m)\} + \{\hat{S}(z)\} \quad (2)$$

ここに、 $[Q(m)]$ 、 $[E(z-z_{m-1})]$ は ω, k 、第 m 層の地盤定数 (せん断剛性 μ 、P波速度 c_1 、S波速度 c_2 、減衰定数 ζ_1, ζ_2) 及び応答点の z 座標等によって決まる定数マトリックス、 $\{C(m)\}$ は未知積分定数ベクトルであり、これらの積が斉次解を表している。

$\{\hat{S}(z)\}$ は第 m 層に加振源が分布する時のみ必要な特解項の z に関する定数ベクトルである。

(2) 特解項 波動方程式における単位質量

(ρ) に作用する体積力の x, z 成分を X, Z とするとき、加振源の加振力を集中加振と一様分布加振に対して、それぞれ次のように定義する。

1) 集中加振

$$F_x = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(x, z) dx dz, \quad F_z = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, z) dx dz \quad (3)$$

X, Z は座標 (ξ, ζ) の位置においてのみ値をもち、その他の位置では、 $X=Z=0$ 。

2) 一様分布加振

$$F_x(z) = \rho \int_{-\infty}^{\infty} X(x, z) dx, \quad F_z(z) = \rho \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, z) dx \quad (4)$$

X, Z は、 $x=\xi$ の位置においてのみ値をもち、 $x \neq \xi$ の位置では $X=Z=0$ 。これらの加振力に対しても、ポテンシ

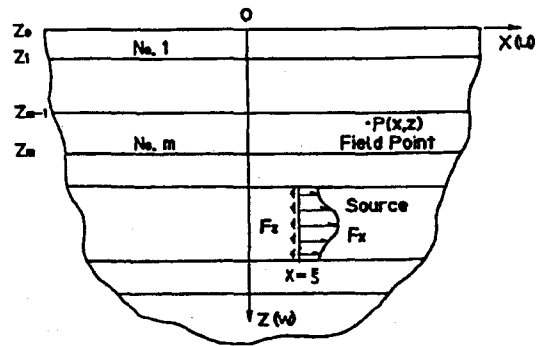


Fig.1 多層地盤における加振源と応答点

ナルを導入し、集中加振においては、x, z方向に二重Fourier変換、一様分布加振においては、x方向にFourier変換すれば、変換領域において、それぞれの特解項を求めることができる。それら変位ポテンシャルから、波数領域における特解項の変位-応力ベクトルは次式のように求まる。(集中加振に対しては、文献1)と同等であるので省略する。) 一様分布加振に対して

$$\{S(z)\} = \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \begin{bmatrix} k_1^2/\nu_1^2 & 0 \\ 0 & k_1^2/\nu_2^2 \\ i\mu(2k^2-k_2^2)k_1^2/(\nu_2^2k) & 0 \\ 0 & -i\mu(2k^2-k_2^2)k_1^2/(\nu_1^2k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに、P波波数 k_1 、S波波数 k_2 、z軸方向のP,S波の波数 ν_1, ν_2 を次のように定義する。

$$k_1 = (1+i\zeta_1)\omega/c_1, \quad k_2 = (1+i\zeta_2)\omega/c_2 \\ \nu_1^2 = k^2 - k_1^2, \quad \nu_2^2 = k^2 - k_2^2 \quad (6)$$

(3) 剛性行列及び波数領域における解

各層の上端(A)、下端(B)における変位 $\{U_{AB}\}$ と応力 $\{T_{AB}\}$ の関係は式(2)を変形することによって次のように得られる。

$$\{T_{AB}\} = [K_{AB}]\{U_{AB}\} - \{P_{AB}\} \quad (7)$$

ここに、 $\{T_{AB}\} = [T_A, \Sigma_A, T_B, \Sigma_B]^T$, $\{U_{AB}\} = [U_A, W_A, U_B, W_B]^T$ であり、 $\{P_{AB}\}$ は外力項ベクトルである。 $[K_{AB}]$ が各層の剛性行列を表す。さらに、 $\{P_{AB}\} = [K_{AB}]\{U_{AB}\} - \{T_{AB}\}$ と表現でき、 $\{U_{AB}\}, \{T_{AB}\}$ は層内に加振源が分布する場合の両端の特解定数ベクトルである。ここでは応力の方向を全体の座標系に合わせるため上端(A)の応力の符号を逆にし、剛性行列の対称性を得るために、 w と Σ に虚数単位 i を乗じている。また、最下層の半無限体に対する剛性行列は斉次解における上昇波成分が存在しないという条件から求めることができる。

波数領域の解は式(7)を用いて、全体系に対しつり合い条件と連続条件を適用することによって、まず層境界の変位と応力が求まり、それを用いて積分定数ベクトルを計算すれば、任意点(z)の応答値 $\{S(z)\}$ が得られる。また σ_{zz} に対応する波数領域の値 Σ_1 は U と Σ から計算できる。

3. 数値計算法

(1) 層の分割 式(2)における $[E(z-z_{m-1})]$ には $\exp[\nu_\alpha(z-z_{m-1})]$, $\alpha = 1, 2$ の項を含んでおり、 $\nu_\alpha(z-z_{m-1})$ の値が非常に大きくなると、精度が急激に落ちるため、層の分割は地盤の物性値の異なる層以外に次式のHの値がある限度を越えると層を自動的に分割する。

$$H = k_{\max} \frac{\omega}{c_{2\min}} (z - z_{m-1}) \quad (8)$$

ここに、 $k_{\max}$: 数値計算する(無次元)波数の最大値

$c_{2\min}$: 各層の内の最小S波速度

z : 応答点のレベル

z_{m-1} : 応答点を含む層の上端レベル

(2) 剛性行列 層厚を h とすると、剛性行列の計算において、 $Re(k_2)/k$ の値が非常に小さくなると桁落ち、 $Re(\nu_1)h$, $Re(\nu_2)h$ が大きくなると、 $\sinh(\nu_1h)$, $\cosh(\nu_1h)$ 等の項においてオーバーフローの問題が発生する。そこで本コードにおいては、桁落ちに対してはテーラー展開近似を用い、オーバーフローに対しては $\exp(\nu_1h)$ 等で剛性行列要素の値を割ることによって処理した。

(3) 波数積分¹⁾ 加振源が集中加振の場合、(加振源座標 (ξ, ζ))波数領域の応答値を一般に $F(k, z, \zeta)$ とおけば、空間領域における応答値 I は次式で表せる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(k, z, \zeta) \exp\{ik(x-\xi)\} dk \quad (9)$$

ところが、加振力 F_x または F_z に対する応答値 $U, W, T, \Sigma, \Sigma_1$ はその種類によって k に関する奇関数か偶関数に

分けることができる。したがって式(9)は、 F_x 加振の u, τ_{xz} と F_z 加振の $w, \sigma_{xz}, \sigma_{zz}$ が次式で表せる。

$$I = 2 \int_0^\infty F(k, z, \zeta) \cos[ik(x-\xi)] dk \quad (10)$$

逆に、 F_x 加振の $w, \sigma_{xz}, \sigma_{zz}$ と F_z 加振の u, τ_{xz} が次式で表せる。

$$I = 2i \int_0^\infty F(k, z, \zeta) \sin[ik(x-\xi)] dk \quad (11)$$

このように、積分範囲は $[0, \infty)$ とできる。この積分区間を変化の激しい有限区間 $[0, k_c]$ と変化の緩やかな無限区間 $[k_c, \infty)$ に分ける。波数 k が十分に大きくなると、 $F(k, z, \zeta)$ は近似的に次式のように表すことができる。

$$F(k, z, \zeta) = \left[\sum_{n=0}^N A_n(z, \zeta) k_{1-n} + O(k^{-N}) \right] \exp(-k|z-\zeta|) \quad (12)$$

従って、ここで $k = 1/q$ とおき、新しい関数 $G(q, z, \zeta)$ を次のように定義し、

$$G(q, z, \zeta) = q F(1/q, z, \zeta) \exp(1/q|z-\zeta|) \quad (13)$$

この $G(q, z, \zeta)$ をChebyshev多項式で近似すると、式(12)の係数 A_n の値が確定でき、式(12)の無限区間における積分は解析的に求めることができる。有限区間の積分については、さらに区間を細分割しながら、 $F(k, z, \zeta)$

を直接Chebyshev多項式近似し、その近似関数（の実部もしくは虚部）との積に対し、閉区間の積分を解析的に行うことができる。

(4) 収束判定条件 計算精度を確定するために、自動分割の収束判定を絶対誤差を用いて次のように行った。

1)無限区間 k_c の値を求めるため、初期値を $k_c > 1.0$ の数として $k_{i,i}$ ($i=1,2,\dots$)と置き (i は繰り返し回数)、式(12)の近似関数を求めるための計算すべき波数の最大値を k_c とする。求めた近似式によって、 $k_{c1} = k_{i,i}$ と $k_{c2} = k_{i,i} + \Delta k$ にたいして、それぞれ無限積分を行う。その応答値をそれぞれ $I_{i,1}, I_{i,2}$ とする。次に、 $k_{i,i+1} = k_{i,i} + \Delta k$ に対する応答値 $I_{i+1,1}, I_{i+1,2}$ を計算し、誤差 ε を次式で定義する。

$$\varepsilon = |I_{i,2} - I_{i+1,1}| \quad (14)$$

この ε が許容誤差 ε_a 以下になるまで計算を繰り返し、満足したときの $k_{i,i+1}$ を k_c とおき、 $I_{i+1,1}$ を応答値とする。今回、 $k_{i,1} = 1.5$, $\Delta k = 0.5$, $k_c = 10 \sim 20$ とした。

1)有限区間 Chebyshev多項式の高次の係数 C_i がそのまま応答値の誤差に関連づけられるため、誤差として次式を採用した。²⁾

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \max (2.5|C_8|, 2.0|C_7|, 1.5|C_6|, 1.2|C_5|) & \text{for } N=8 \\ \varepsilon &= \max (2.5|C_4|, 0.5|C_3|) & \text{for } N=4 \end{aligned} \quad (15)$$

積分次数 N は計算精度の上から有限区間においては $N=4$ または $N=8$ を無限区間においては $N=4$ を用いることにした。なお数値計算においては、長さの単位は $k_{2,max}$ 、力の単位は μ_{min} を用いて無次元化している。

4. 数値計算例及び考察

本計算法の妥当性を検証するために、Fig.2とTable-1に示すような、半無限地盤を仮定の2層系地盤に分割し、集中単位加振 F_x, F_z を作成させたモデルを用いて計算した。計算結果をFig.3 (変位: u)、Fig.4 (応力: σ_{xz})に示す。それぞれ文献¹⁾の計算結果と比較している。ほぼ妥当な結果が得られている。次に

加振点(0,0)、応答点(1,1)、物性値Table-2に示すようなモデルを用いて、与えた許容誤差 ε_a に対する応答値と計算した波数の数をTable-3に示す。なお、本法による、剛性行列表現による半無限体地盤に対する地表面加振の地表面応答の形式解は、 $Lamb^4)$ の形式解と一致していることを確かめている。本計算法によって、多層系粘弾性地盤のグリーン関数が、精度よく効率的に計算できることがわかった。

Table-1 計算条件 (A)

Thickness	c_1	c_2	ζ_1	ζ_2	Density
5.0	2.0	1.0	0.005	0.005	1.0
∞	2.0	1.0	0.005	0.005	1.0

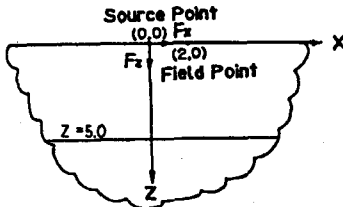


Fig.2 2層系地盤

Table-2 計算条件 (B)

ω	c_1	c_2	ζ_1	ζ_2	Density
$0.001s^{-1}$	2.0	1.0	0.001	0.001	1.0

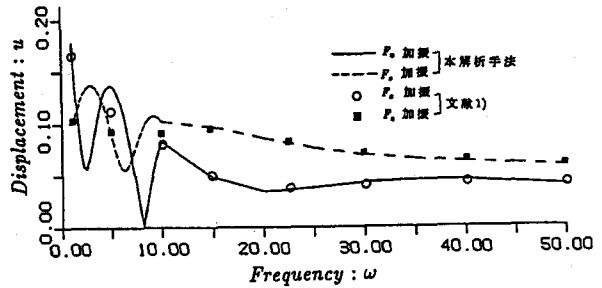


Fig.3 変位:u の比較

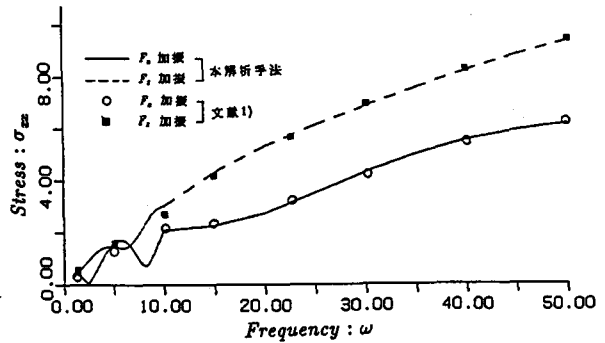
Fig.4 応力:σ_{xx} の比較

Table-3 許容誤差による応答値と波数個数の比較

(応力の単位 : $\times 10^{-4}$)

加振	ϵ_s	本解析手法				文献3)	static ³⁾
		5.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}		
F_z	$-\sigma_{xx}$	159192	159215	159415	160446	159148	159155
	$-\sigma_{zz}$	159155	159155	159155	159155	159152	159155
	$-\tau_{xz}$	159155	159155	159155	159113	159153	159155
F_x	$-\sigma_{xx}$	159148	159145	159127	157799	158005	159155
	$-\sigma_{zz}$	159156	159156	159156	159110	159153	159155
	$-\tau_{xz}$	159155	159155	159155	159156	159152	159155
波数の個数		717	557	249	9		

参考文献

- 1) P.-C.Xu and A.K.Mal : Calculation of the inplane Green's functions for a layered viscoelastic solid, Bull.Seism.Soc.Am.,Vol.77,No.5(1987)
- 2) P.-C.Xu and A.K.Mal : An adaptive integration scheme for irregularly oscillatory functions,Wave Motion 7(1985).
- 3) M.Dravinski and T.M.Mossessian : On evaluation of the Green functions for harmonic line loads in a viscoelastic half space, International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol.26(1988)
- 4) Horace Lamb : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil.Trans.(1903)