

(29) 多次元非定常ARモデルの同定

武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

1. はじめに

ひと組のデータ; $Y(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t)\}$ が確率過程現象のマルチリアル化波形として観測されたとき、これらを m -variate, one-dimensional ARモデルで同定する手法の定式化を行い、その試算例を示している。用いた手法は自己回帰モデルを状態方程式と観測方程式へと定式化した上でカルマンフィルタによる漸化的同定法である。

自己回帰モデル(AR)や自己回帰移動平均モデル(ARMA)はそれらの係数行列が決定されると、漸化的にマルチリアル化波を作成できるので、従来の調和関数型モデルによるよりも効率的であることから地震動シミュレーションに用いられている。研究には(1) 相互相関関数または相互スペクトル密度関数が確率過程現象の特性として与えられ、それを満たすマルチリアル化波形をシミュレートするもの、(2) 地震加速度波形をマルチリアル化波形として、ARモデルを同定し、それより必要に応じたマルチリアル化波形をシミュレートしようとするもの、の2つの流れがある。(1)の流れで相互相関関数などを規定するが、それをどのような方法で作成するかということは(2)の流れに於けるARモデルを同定することと等しい。いわゆる時間領域モデルの研究は、(1)の流れとしてGersh¹らの2段階最小自乗法を源流とした多くの研究がある^{2~6}。また(2)の流れではNau, R.F.⁷, Sataf, E.⁸の研究がある。本研究は、(2)の流れに分類され、Nauらの研究と同様にカルマンフィルタによる同定である。しかしNauらの方法は、他の全ての研究と同様に基本的には2段階同定法に基づいている。本研究は、モデルにおける係数行列; A_i を効率的に同定すると同時に入力ノイズの係数行列; B も同時に同定できる手法となっており、定常・非定常を問わず1度のマルチリアル化波の処理により漸化的に同定を行う。

2. 理論

m -variate, one-dimensionalのARモデルは(1)式で与えられる。

$$\sum_{i=0}^p A_i Y(k-i) = B \cdot X(k) \quad (1)$$

ここで、 $A_0 = I$ (単位行列) とすれば、

$$Y(k) = -\sum_{i=1}^p A_i Y(k-i) + B \cdot X(k), \quad X(k); \text{平均値0, 分散1の互いに独立なwhite noise} \quad (2)$$

(2)式を具体的に表現すると(3)式となる。

$$\begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_m(k) \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} a_{11}(i) & a_{12}(i) & \dots & a_{1m}(i) \\ a_{21}(i) & a_{22}(i) & \dots & a_{2m}(i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(i) & a_{m2}(i) & \dots & a_{mm}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(k-i) \\ Y_2(k-i) \\ \vdots \\ Y_m(k-i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_m(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

また、 $J_k = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$; 第 k 要素を1とする列ベクトルとすると、(3)式は、

$$Y(k) = -\sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} J_1^T A_i Y(k-i) \\ J_2^T A_i Y(k-i) \\ \vdots \\ J_m^T A_i Y(k-i) \end{bmatrix} + B \cdot X(k) \quad (4)$$

ところで、 $J_L^T A_i Y(k-i)$ は 1×1 のスカラー量であるから、 $(J_L^T A_i Y(k-i))^T = J_L^T A_i Y(k-i)$ である。故に(4)式は、次の様になる。

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^P \begin{bmatrix} Y^T(k-i) A_i^T J_1 \\ Y^T(k-i) A_i^T J_2 \\ \vdots \\ Y^T(k-i) A_i^T J_m \end{bmatrix} + B_o X(k) \quad (5)$$

ここで、 $a_{li} = A_i^T J_l = [a_{li1}(i), a_{li2}(i), \dots, a_{lin}(i)]^T$ とおくと

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^P \begin{bmatrix} Y^T(k-i) & & & & 0 \\ & Y^T(k-i) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Y^T(k-i) & \\ 0 & & & & Y^T(k-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} + B_o X(k) \quad (6)$$

また(2)式において右方から $X(k)$ を乗じて、両辺の期待値をとれば次式を得る。

$$E[Y(k)X^T(k)] = - \sum_{i=1}^P A_i E[Y(k-i)X^T(k)] + B_o E[X(k)X^T(k)] \quad (7)$$

ここで、 $E[Y(k-i)X^T(k)] = 0$ 、 $E[X(k)X^T(k)] = I$ である。したがって(7)式は、

$$B_o = E[Y(k)X^T(k)] \quad (8)$$

あるいは、

$$\begin{bmatrix} E[Y_1(k)X_1(k)] & & & & 0 \\ E[Y_2(k)X_1(k)] & E[Y_2(k)X_2(k)] & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ E[Y_m(k)X_1(k)] & E[Y_m(k)X_2(k)] & \dots & E[Y_m(k)X_m(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & & & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3. カルマンフィルタへの定式化

係数行列 A_i および B_o の同定に際し、両者の同定を並行して漸行的に行う様に定式化を行っている。状態方程式は、定常状態を前提として、(10)式の様に定式化するが、ノイズ $\delta(k)$ を用いることでパラメタの時間的変動にも対応できる様になっている。

$$\begin{aligned} Z &= [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid \dots \mid a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid b_{11} \mid b_{21} \ b_{22} \mid \dots \\ &\quad \dots \mid b_{m1} \ b_{m2} \ \dots \ b_{mm}]^T; \text{at } k \\ &= [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid \dots \mid a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \mid b_{11} \mid b_{21} \ b_{22} \mid \dots \\ &\quad \dots \mid b_{m1} \ b_{m2} \ \dots \ b_{mm}]^T + \delta(k-1); \text{at } k-1 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\delta(k); (m \times m \times p) \times 1$ ベクトル、互いに独立、平均値0、分散小である。

観測方程式は、(6)および(9)式に基づいて次のように定式化する。

$$\begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_m(k) \\ \hline (1/k) \sum Y_1(k) X_1(k) \\ \hline (1/k) \sum Y_2(k) X_1(k) \\ (1/k) \sum Y_2(k) X_2(k) \\ \hline \vdots \\ \hline (1/k) \sum Y_m(k) X_1(k) \\ (1/k) \sum Y_m(k) X_2(k) \\ \vdots \\ (1/k) \sum Y_m(k) X_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} Y^T(k-1) \backslash \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-1) \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \backslash \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-1) \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} Y^T(k-2) \backslash \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-2) \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \backslash \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-2) \end{array} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} Y^T(k-p) \backslash \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-p) \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \backslash \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ Y^T(k-p) \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 10 \cdots 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 010 \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0010 \cdots 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 010 \cdots 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \cdots 010 \\ & & & & 0 \cdots 01 \end{bmatrix} Z + \varepsilon(k) \quad (11)$$

但し、 $\varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k), \dots, \varepsilon_{(m+1)/2+m}(k)]$ 、 $\varepsilon_i(k)$ は互いに独立な平均0、分散任意のホワイトノイズである。 k ステップまでのデータを処理した時点で、 $E[Y_i(k)X_j(k)] = (1/k) \sum_{s=1}^k Y_i(s)X_j(s)$ ； $i \geq j$ とする。
 なお、ホワイトノイズ $X_i(k)$ は与えられた条件を満足するように予めシミュレートし、既知量として与えることとする。

4. 試算例

ここでは、uni-variate, one-dimensionalのARモデルを採用し、 $P=6$ とした場合の試算結果を示す。図-1に、サンプル観測波形の例を示す。また、図-2に、本手法によるARモデルのパラメータ同定結果を示し、図-3は同定結果を用いてシミュレートしたサンプル波形を示す。なお、同定に際し各パラメータの初期値を0.0、初期の推定誤差共分散値を1.0とし、 $\delta(k)$ の共分散値の対角要素は0.0001とし、その他の要素は0.0としている。また $\varepsilon(k)$ の共分散値の対角要素は $[0.0001, 5.0]$ とし、その他の要素は0.0としている。

図-3より、シミュレートしたサンプル波形が観測波形(図-1)と良い対応を示していることがわかる。したがって、同定されたパラメータの精度は良いものと思われる。

注) 本研究は星谷が理論の誘導を、丸山が加マフィルタの計算を分担している。また、数値計算を行うにあたり、武蔵工業大学計算機センター、FACOM-360システムを使用している。

参考文献：(1)Gersh, W., Jour. of Appl. Mech, ASME, 1976 (2)Hoshiya, M. 他, Jour. of E.M., ASCE, 1984 (3)Hoshiya, M. 他, Jour. of E.M., ASCE, 1986, (4)Shinozuka, M. 他, Jour of E.M. ASCE, 1985, (5)Li, Y. 他, 5th ASCE Conf. 1988, (6)Mignolet, M.P. 他, 5th ASCE Conf., 1988, (7)Nau, R.F. 他, Bull. SSA, 1982, (8)Sataf, E., 5th ASCE Conf., 1988.

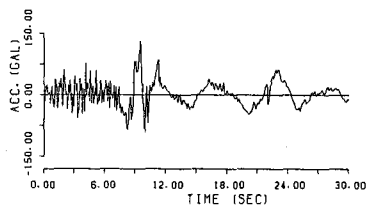


図-1. サンプル観測波形

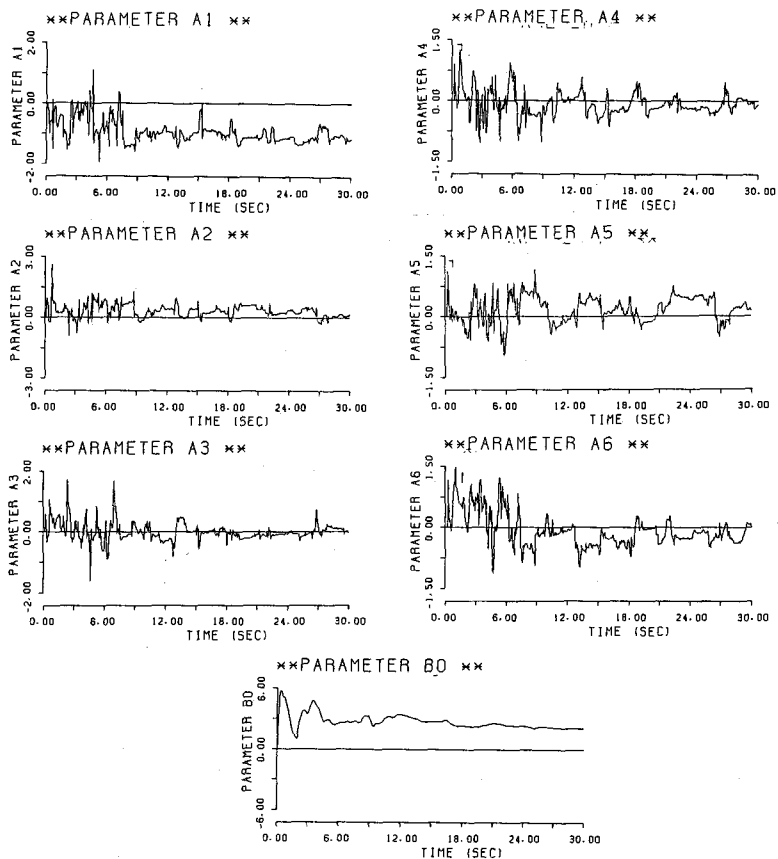


図-2. パラメータ同定結果

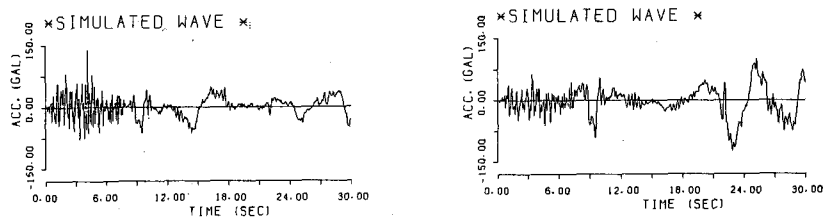


図-3. サンプル波形例