

(17) ランダム特性を有する地盤の 空間-時間応答特性

宮崎大学大学院 学生員 ○否笠 友紀
宮崎大学大学院 学生員 西川 博敏
宮崎大学工学部 正 員 原田 隆典

1. はじめに

従来の地盤振動解析では、深さ方向のみを考慮する1次元地盤モデルや、これに水平方向を加えた2次元地盤モデルが検討の対象となることが多い。しかし、地盤定数は場所とともに不規則に変わるものとして3次元的にモデル化の方がより現実的に近いように思われる。本研究ではランダムな地盤定数を持つ地盤モデルもとつてあつかえる3次元地盤モデルの地震応答を一般化座標の方法を用いて解析し、これに基づいて地盤応答の空間-時間特性について考察する。

2. 不均質地盤の運動方程式

図1に示すように基盤 ($z = H$) に $U_g(x, y, t)$ 、 $V_g(x, y, t)$ で表わされる地震動変位を受ける場合の表層地盤の応答変位 $U(x, y, z, t)$ 、 $V(x, y, z, t)$ の特性を解析する。3次元直交座標系における粘弾性体の波動方程式において、上下方向変位を零と仮定すると均質表層地盤の運動方程式として次式が得られる。

$$\ddot{V} - c_p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - c_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\ddot{V}_g + c_p^2 \frac{\partial^2 V_g}{\partial y^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 V_g}{\partial x^2} + (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 U_g}{\partial x \partial y} \quad (1-a)$$

$$\ddot{U} - c_p^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - c_s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\ddot{U}_g + c_p^2 \frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2} + (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 V_g}{\partial x \partial y} \quad (1-b)$$

ここに、

$$c_p = c_p^* \sqrt{1 + ID_p}, \quad c_s = c_s^* \sqrt{1 + ID_s}, \quad I = \sqrt{-1}$$

$$D_p = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} \quad (P波に係わる), \quad D_s = \frac{\mu'}{\mu} \quad (S波に係わる)$$

$$c_p^* = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (P波速度), \quad c_s^* = \sqrt{\mu/\rho} \quad (S波速度) \quad (2)$$

式(1)はP波、S波速度を係数とする波動方程式であるため、ここでは簡単のため、P波、S波速度が式(3)のように空間座標 x, y, z の関数となる地盤を不均質地盤と呼ぶことにする。このような仮定はラーメの複素係数の空間座標に関する微係数を無視してP波、S波速度の空間座標における変化のみを考えているわけでラーメの複素係数の不均質性が波長内で急激に変化しないような場合に当てる。

$$c_p^* = c_p^*(z) [1 + f_p(x, y)], \quad c_s^* = c_s^*(z) [1 + f_s(x, y)] \quad (3)$$

ここに深さ z に関しては確定関数とし、水平方向 x, y に関しては不規則関数とする。 c_p が z の関数となる場合には一般にモード関数の直交性が成立しないため、ここでは $c_p(z)$ の深さ方向の平均値を採用することにより定数と考えるものとする。

式(3)条件のもとに式(1)の厳密解を得ることは難かしいがモード関数 $\phi_n(z)$ を仮定することにより近似解を得ることができる。

$$U(x, y, z, t) = \sum U_n(x, y, t) \phi_n(z) \quad (4-a)$$

$$V(x, y, z, t) = \sum V_n(x, y, t) \phi_n(z) \quad (4-b)$$

$$\phi_n(0) = 1 \quad (4-c)$$

ここに、 U_n, V_n は一般化変位(座標)、 ϕ_n はモード関数を表わす。モード関数は幾何学的境界条件を満たす形状であればどのような関数を仮定してもよいが、地震動を受ける地盤の振動モードに近い形状を仮定すると近似度がよくなる。必ずしも必要ではないが、モード関数は式(4-c)のように規格化しておく方がよい。またモード関数は直交性を有するため、式(1)よりモードごとの一般化変位 U_n, V_n に関する波動方程式を得ることができる。

$$\ddot{U}_n - c_p^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 V_n}{\partial x \partial y} + \omega_n^2 U_n = -\beta_n [\ddot{U}_g - c_p^2 \frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 V_g}{\partial x \partial y}] \quad (5-a)$$

$$\ddot{V}_n - c_p^2 \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial y} + \omega_n^2 V_n = -\beta_n [\ddot{V}_g - c_p^2 \frac{\partial^2 V_g}{\partial y^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 V_g}{\partial x^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 U_g}{\partial x \partial y}] \quad (5-b)$$

ここに、 $\omega_n(x, y)$ は地盤の n 次固有振動数、 β_n は刺激係数を意味する。したがって、P 波、S 波速度が空間座標 x, y, z の関数となるような不均質地盤の地震応答は式 (3) (4) (5) によって記述されることがわかる。

3. 応答パワースペクトル密度関数

式 (3) の条件のもとで式 (4) (5) の関係を使い不均質地盤の応答パワースペクトル密度関数を求めることができる。このためには次のような多次元定常確率過程のフーリエ変換およびパワースペクトル密度関数の関係を必要とする。パワースペクトル密度関数 $S_{ff}(k_x, k_y, \omega)$ を有する定常確率過程 $f(x, y, t)$ のフーリエ変換を次のように定義すると、

$$F(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint f(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} dx dy dt \quad (6)$$

フーリエ逆変換は、

$$f(x, y, t) = \iiint F(k_x, k_y, \omega) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} dk_x dk_y d\omega \quad (7)$$

よく知られているようにパワースペクトル密度関数と相関関数の間にはフーリエ変換の関係が成り立つ

$$S_{ff}(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ff}(\xi_x, \xi_y, \tau) e^{-i(k_x \xi_x + k_y \xi_y - \omega \tau)} d\xi_x d\xi_y d\tau \quad (8-a)$$

$$R_{ff}(\xi_x, \xi_y, \tau) = \iiint S_{ff}(k_x, k_y, \omega) e^{i(k_x \xi_x + k_y \xi_y - \omega \tau)} dk_x dk_y d\omega \quad (8-b)$$

上式の関係を使うとパワースペクトル密度関数 $S_{ff}(k_x, k_y, \omega)$ と $F(k_x, k_y, \omega)$ の共分散には次のような関係が成り立つ。

$$E[F(k_x, k_y, \omega) \bar{F}(k'_x, k'_y, \omega')] = \begin{cases} S_{ff}(k_x, k_y, \omega) & k_x = k'_x, k_y = k'_y, \omega = \omega' \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

基盤の地震波は、図 2 のように角度 θ の方向に速度 c で伝わるものとする

$$f_g(x, y, t) = f_g\left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c}\right) \quad (10)$$

上式のフーリエ変換は

$$F_g(k_x, k_y, \omega) = F_g(\omega) \delta(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0) \quad (11)$$

ここに

$$k_x^0 = \frac{\omega \cos \theta}{c}, \quad k_y^0 = \frac{\omega \sin \theta}{c} \quad (12)$$

今、地震動のうち $V_g = 0$ とし、 n 次モードのみを考えた地表変位 $u(x, y, t)$ のパワースペクトル密度関数は次式のように表わすことができる。

$$S_{uu} u_n(k_x, k_y, \omega) = S_{u_g u_g}(\omega) \left(\frac{\beta_n}{k}\right)^2 \left[A_n(k_x, k_y, \omega) \delta(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0) + B_n(k_x, k_y, \omega) S_{f_g f_g}(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0) \right] \quad (13)$$

ここに

$$A_n(k_x, k_y, \omega) = \left| G(k_x, k_y, C_p) k_x \cos \theta + G(k_x, k_y, C_s) k_y \sin \theta \right|^2 \quad (14-a)$$

$$B_n(k_x, k_y, \omega) = \left| E(k_x, k_y, C_p) G(k_x^0, k_y^0, C_p) k_x \cos \theta + E(k_x, k_y, C_s) G(k_x^0, k_y^0, C_s) k_y \sin \theta \right|^2 \quad (14-b)$$

$$E(k_x, k_y, X) = \frac{-\omega_n^2}{-\omega^2 + X^2(k_x^2 + k_y^2) + \omega_n^2} \quad (14-c)$$

$$G(k_x^0, k_y^0, X) = \frac{-\omega^2 + X^2(k_x^2 + k_y^2)}{-\omega^2 + X^2(k_x^2 + k_y^2) + \omega_n^2} \quad (14-d)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (14-e)$$

$S_{uug}(\omega)$ は基盤地震動 U_g のパワースペクトルを、 $S_{fsfs}(k_x, k_y)$ は、S 波の空間的ばらつきを表す関数 $f_s(x, y)$ のパワースペクトルを意味する。上式の第 1 項は均質地盤におけるパワースペクトル、第 2 項は S 波の空間的ばらつきによる項で、全体の応答パワースペクトルは、この両方の和で表わされている。

4. 数値計算例

式 (14-a) の A_n は、均質地盤における伝達関数であるが、図 3 は $\omega = 1, 3, 5, 7$ rad/s ごとにプロットしたもので各パラメータとしては次のものを使用した。

$$\beta_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \omega_1 = 3 \text{ rad/s}, \quad D_p = D_s = 0.6$$

$$C_p = 573 \text{ m/s}, \quad C_s = 193 \text{ m/s}$$

(15)

$\omega = 5, 7$ rad/s では、2 つのリングが見られ、その内側は P 波に、外側は S 波に起因する。基盤での入力地震動は x 軸方向の変位成分 U_g のみであるため、P 波に起因する内側のリングは k_x 軸の回りにパワーが集中し、 k_y 軸の回りは小さい。逆に S 波によるパワーは k_y 軸の回りに集中し、 k_x 軸上では小さくなる。このように均質地盤を仮定したにもかかわらず、3 次元的に地盤を解析すると、地盤の 1 次固有振動数 ω_1 (3 rad/s) より高い振動数においては、波動が水平に伝播して水平面内の各点において基盤との伝達関数 (増幅率) が異なりその結果、均質地盤においても水平面内の各点で応答が違ってくるのがわかる。

図 4 は、式 (13) のパワースペクトルを $\omega = 1, 2, 3, 4$ rad/s ごとにプロットしたものである。s 波速度に起因するパワースペクトルと基盤地震動 U_g のパワースペクトルは次式のものを用いた。

$$S_{fsfs}(k_x, k_y) = \frac{b_{sx}^2 b_{sy}^2}{16\pi} k_x k_y \exp \left[-\left(\frac{b_{sx} k_x}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_{sy} k_y}{2} \right)^2 \right] \quad (16-a)$$

$$S_{uug}(\omega) = 1$$

(16-b)

ここで

$$b_{sx} = b_{sy} = 141.42 \text{ m} \quad \sigma_{ss} = 0.02$$

(17)

他のパラメータには、均質地盤と同じものを使用した。

固有振動数 ω_1 ($= 3$ rad/s) より低い振動数領域では、基盤の地震動 (速度 c 伝播) のパワースペクトルが卓越しているため 1 つのバルスが見られる。しかし、 $\omega \geq \omega_1$ の領域では s 波のばらつきによるパワースペクトルが相対的に大きくなっている。波数平面には、これらによるパワースペクトルの山、谷が表われてくる。したがって、低い振動数領域では、単一のコヒーレントな波動が伝播するように見えるが、振動数が高くなると s 波のばらつきによりいろいろな方向に伝播する波動が表われてきて、インコヒーレントな振動となるのがわかる。

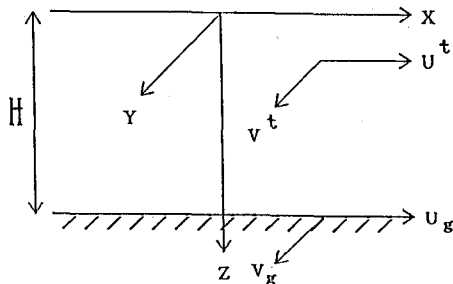


図-1 3次元直交座標系と変位成分

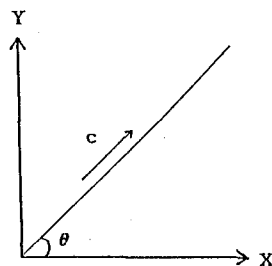


図-2 入力地震波モデル

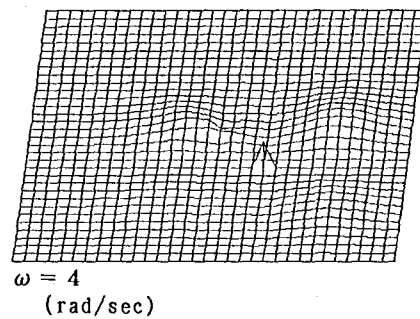
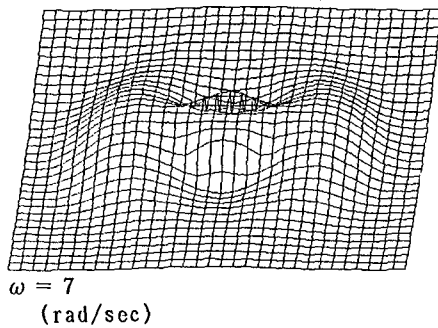
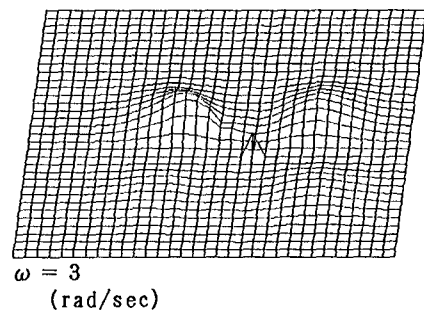
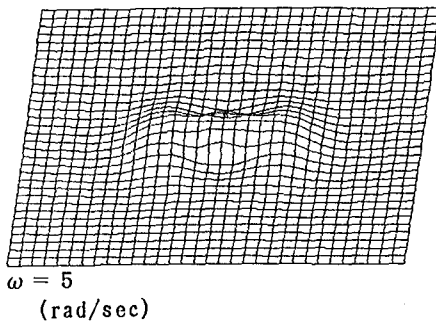
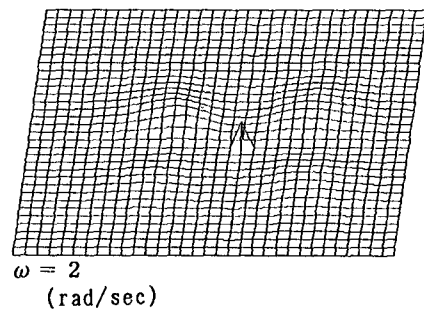
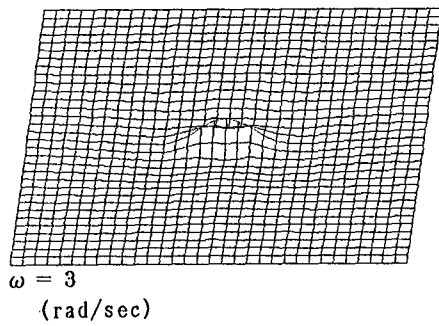
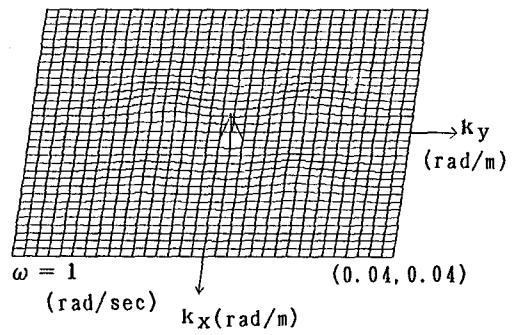
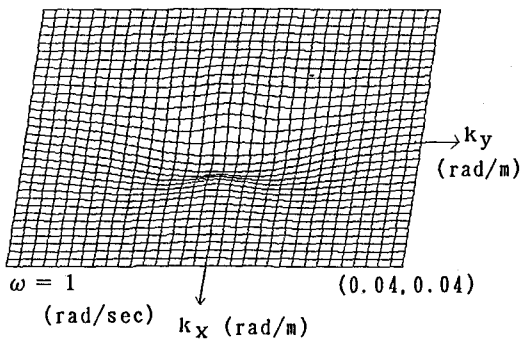


図-3 均質地盤の伝達関数

図-4 確率地盤の応答パワースペクトル