

(113) V-レググラーマン橋における集中質量法と

整合質量法との相違について

中央コンサルタンツ(株) 正員 松井義孝
 北海道大学(工博) 正員 林川俊郎
 専修大学北海道短大(工博) 正員 金子孝吉
 北海道開発局 土木試験所 正員 吉田敏一

1. まえがき

橋梁の動的解析では、モーダルアナリシスが動的挙動を解明する有益な手法であり、入力地震動とモデル化が応答結果について重要なウエイトを示す。固有振動解析はその構造物のモデル化によって、離散系(discrete system)と連続系(Continuous system)に分類できる前者には骨組部材の分布質量を両節点に等しく置換する集中質量法(lumped mass method)と3次の多項式で表示した変位関数を用いて分布質量を配分する整合質量法(Consistent mass method)がある。

連続質量法(Continuous Mass Method)は、質量、剛性などの力学的特性を連続的な分布量として取り扱う厳密解である。³⁾⁴⁾⁵⁾

本文のVレググラーマン橋の様な特殊橋梁では、固有値接近と質量連成が生じる。

この各々の連成作用を集中質量法と整合質量法を用いて関係を洗い出し、応答値についてはRMS, CQC法によりその互換性を述べる。

2. 離散系における集中質量法と整合質量法の解

Fig.2に示す単一曲げ部材端部に節点変位が与えられた時に得られる変位関数(3次のベキ関数で近似する)を内挿関数 Ψ_i より式(1)(2)を用いて剛性マトリックス、質量マトリックスが求められる。

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \cdot \Psi_i''(x) \cdot \Psi_j''(x) dx \quad (1)$$

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \cdot \Psi_i(x) \cdot \Psi_j(x) dx \quad (2)$$

式(3)(4)(5)の各部材の剛性マトリックスおよび質量マトリックスに重ね合わせの原理を適用すると離散系における振動数方程式が得られ式(6)より固有値が決定される。

$$M_i = \frac{mL}{24} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2 & 0 & 0 \\ & & 12 & 0 \\ \text{Sym.} & & & L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \quad (6)$$

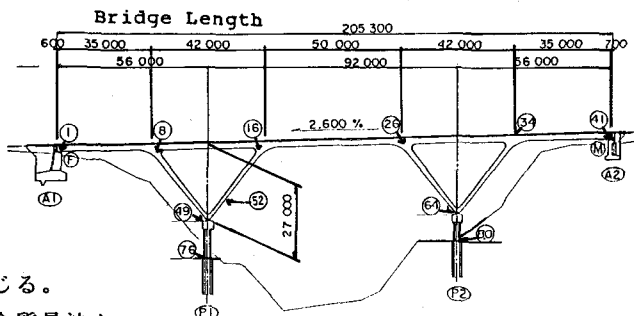


Fig.1 General view of Bridge

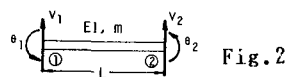


Fig.2

$$K_s = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

K_s =Stiffness Matrix

$$M_i = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

M_i =Lumped Mass Matrix

M_c =Consistent Mass Matrix

3. 連続系による解^{3) 4) 5)}

部材の自由縦振動の基礎微分方程式の一般解を用いて、部材両端の節点力と節点変位の関係をマトリックス表示すると、次のような動的な剛性マトリックスが得られる。

$$M_a = EA \alpha \begin{bmatrix} \cot \alpha L & -\operatorname{cosec} \alpha L \\ -\operatorname{cosec} \alpha L & \cot \alpha L \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $\alpha = \sqrt{\rho \omega^2 / E}$ 。

同様に、桁の自由曲げ振動の基礎微分方程式の一般解を用いることにより

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & \\ k_{33} & k_{34} & & \\ \text{Symmetric} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= K(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda) \\ k_{12} &= -K(\sin \lambda \cosh \lambda) / \beta \\ k_{13} &= -K(\sin \lambda + \sinh \lambda) \\ k_{14} &= K(\cos \lambda - \cosh \lambda) / \beta \\ k_{22} &= K(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) / \beta^2 \\ k_{23} &= -K_{14} \\ k_{24} &= -K(\sin \lambda - \sinh \lambda) / \beta^2 \\ k_{33} &= k_{11}; k_{34} = -k_{12}; k_{44} = k_{22} \\ K &= EI \beta^3 / (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) \end{aligned}$$

ここで、 $\beta^4 = \rho A \omega^2 / EI$ 。

式(7)と式(8)の動的な剛性マトリックスは、静的問題の場合の剛性マトリックスと全く同様にして、重ね合わせの原理を用いることが可能である。

4. モード解析結果

- 1) 本モデルは、変断面剛性(EI)最大入力加速度 $A=210\text{gal}$, 減衰定数2%, 1種地盤スペクトルを用いて計算した。
- 2) モードの様子は4次モード迄水平、鉛直成分共バランスよく分担し5次モード以降若干水平成分が卓越している。
- 3) 円振動数は、集中質量法より整合質量法の方が必ず大きかった。
- 4) Fig.4参照により、整合質量法は連続質量法(厳密解)に近く、集中質量法ではバラつきが生じた。

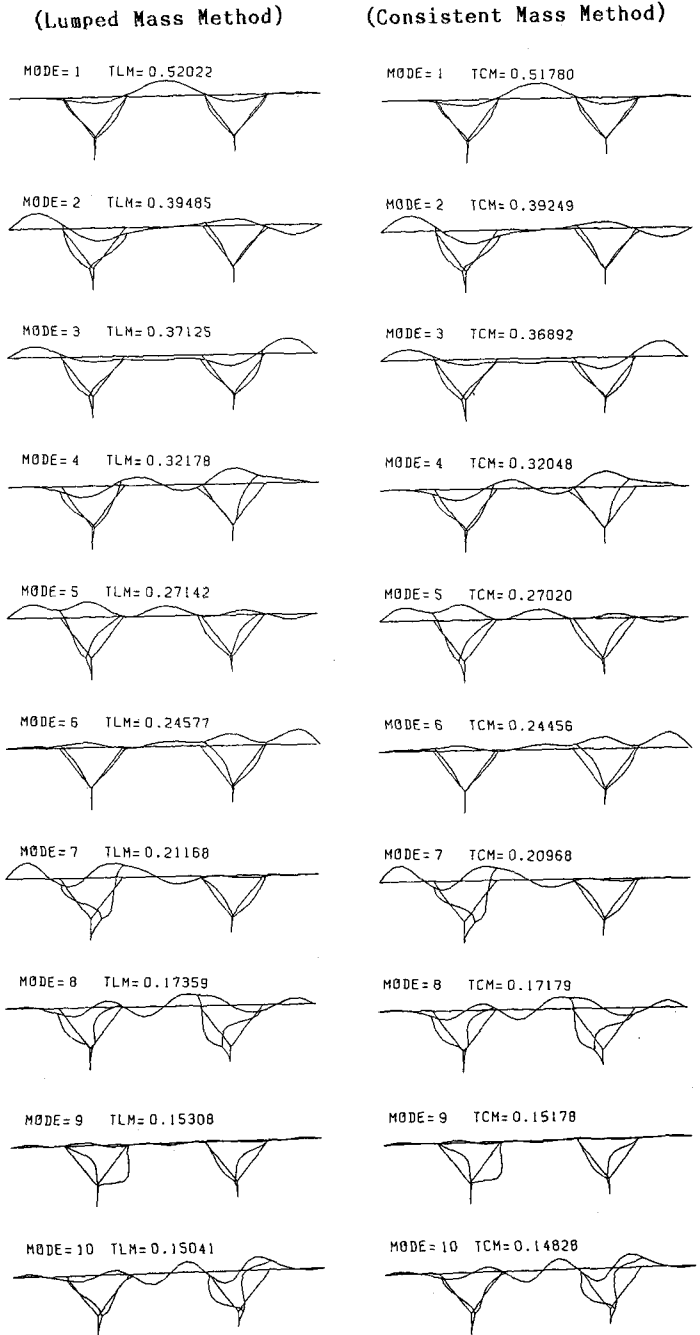


Fig.3 Mode Shape of Discrete system

5. 質量特性の差によるRMS法とCQC法への影響

モード法の考え方の中でモード質量Mの係わりと応答変位への影響について述べる。

固有値特性は以下の様に求める。

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = \{P(t)\} \quad (9)$$

$[C], \{P(t)\} = 0$ とすると

$$U = \Phi \cdot e^{i\omega t}$$

$$[[K] - \omega^2 \cdot [M]]\Phi = 0 \quad (10)$$

より固有値が与えられ、式(9)に外力、減衰を受け一次変換を施せばモード毎の運動方程式となる。

$$\ddot{q}_n + 2h_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n + \omega_n^2 \cdot q_n = -\beta_n \cdot \ddot{U}_g(t) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= [M]^{-1} \cdot [\Phi]^T \cdot [M] \cdot 1 \\ &= \frac{\Phi_n^T \cdot [M] \cdot 1}{\Phi_n^T \cdot [M] \cdot \Phi_n} \end{aligned} \quad (12)$$

β は刺激係数と呼ばれ、ここに集中質量と整合質量、モードの値が重要な意味をもってくる。応答スペクトル法では加速度応答スペクトルより速度応答スペクトルSVを求め式(13)によって計算する。

$$\begin{aligned} q_n &= \beta_n \cdot q_{n0} \\ &= (1/\omega_n \cdot \sqrt{1-h_n^2}) \cdot |\beta_n \cdot S_v| \end{aligned} \quad (13)$$

故に、応答変位 $U = [\Phi] \cdot q$

RMS法では(k点の応答変位U)

$$\begin{aligned} U_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \phi_{in} \cdot \beta_n \cdot S_{vn}} \\ &= \sqrt{U_{LCC}^2} \end{aligned} \quad (14)$$

CQC法では、 ρ_{ij} が加わり

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\sum_{i,j} U_{ki} \cdot \rho_{ij} \cdot U_{kj}} \\ &= \sqrt{[U]^T \cdot [\rho] \cdot [U]} \end{aligned} \quad (15)$$

モード相関係数 ρ は、

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{h_i \cdot h_j} (h_i + r \cdot h_j) r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4h_i \cdot h_j \cdot r (1+r^2) + 4(h_i^2 + h_j^2) r^2} \quad (16)$$

$$r = \omega_i / \omega_j \quad (17)$$

Table.1 Freq,PF, ρ_{ij} Factor of Lumped Mass

MODE NO	FREQ. Rad/sec	PARTICIPATION FACTOR	MODAL CROSS-CORRELATION COEFFICIENT (ρ_{ij})											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.922	2.085	1.0000	0.0203	0.0135	0.0065	0.0035	0.0025	0.0017	0.0010	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
2	2.533	1.391		1.0000	0.2962	0.0365	0.0109	0.0067	0.0038	0.0021	0.0015	0.0014	0.0011	0.0011
3	2.694	-2.777			1.0000	0.0722	0.0157	0.0090	0.0047	0.0024	0.0017	0.0017	0.0013	0.0013
4	3.108	-3.287				1.0000	0.0520	0.0212	0.0087	0.0039	0.0026	0.0025	0.0019	0.0019
5	3.684	1.084					1.0000	0.1394	0.0249	0.0076	0.0044	0.0043	0.0031	0.0030
6	4.069	12.148						1.0000	0.0666	0.0127	0.0068	0.0063	0.0044	0.0043
7	4.724	6.181							1.0000	0.0387	0.0147	0.0132	0.0082	0.0078
8	5.761	-3.071								1.0000	0.0916	0.0719	0.0283	0.0261
9	6.532	0.413									1.0000	0.8375	0.1220	0.1044
10	6.649	3.662										1.0000	0.1661	0.1393
11	7.271	-2.087											1.0000	0.9433
12	7.343	1.576												1.0000

Table.2 Freq,PF, ρ_{ij} Factor of Consistent Mass

MODE NO	FREQ. Rad/sec	PARTICIPATION FACTOR	MODAL CROSS-CORRELATION COEFFICIENT (ρ_{ij})											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.931	2.119	1.0000	0.0200	0.0134	0.0066	0.0035	0.0025	0.0016	0.0010	0.0006	0.0007	0.0006	0.0006
2	2.546	1.491		1.0000	0.2940	0.0372	0.0110	0.0068	0.0037	0.0023	0.0015	0.0014	0.0011	0.0011
3	2.711	-2.847			1.0000	0.0744	0.0159	0.0091	0.0047	0.0024	0.0017	0.0016	0.0013	0.0013
4	3.120	-3.345				1.0000	0.0516	0.0211	0.0085	0.0036	0.0025	0.0024	0.0019	0.0018
5	3.701	1.113					1.0000	0.1383	0.0240	0.0074	0.0045	0.0041	0.0031	0.0030
6	4.089	12.293						1.0000	0.0630	0.0123	0.0067	0.0060	0.0043	0.0042
7	4.769	6.301							1.0000	0.0384	0.0146	0.0128	0.0082	0.0079
8	5.821	-2.995								1.0000	0.0942	0.0665	0.0266	0.0265
9	6.589	0.752									1.0000	0.7468	0.1205	0.1042
10	6.744	3.758										1.0000	0.1823	0.1525
11	7.339	-1.972											1.0000	0.9498
12	7.407	1.612												1.0000

Table.3 Result of Displacement Vector "Node 52"

Mode	Lumped mass			Consistent mass		
	Φ_L	Q_L	U_L	Φ_c	Q_c	U_c
1	0.0703	0.0441	0.0030971	0.0587	0.0446	0.0030670
2	-0.0095	0.0197	-0.0001862	-0.0093	0.0210	-0.0001947
3	-0.0505	-0.0371	0.0018727	-0.0504	-0.0378	-0.0019054
4	0.0354	-0.0393	-0.0013891	0.0347	-0.0401	-0.0013900
5	-0.1050	0.0119	-0.0012474	-0.1055	0.0122	-0.0012829
6	0.0189	0.1240	0.0023472	0.0194	0.1246	0.0024127
7	0.1151	0.0508	0.0058489	0.1164	0.0511	0.0059491
8	-0.0967	-0.0166	0.0016022	-0.0976	-0.0157	0.0015366
9	0.3691	0.0016	0.0006021	0.3753	0.0028	0.0010898
10	0.0423	0.0138	0.0005836	0.0484	0.0137	0.0006607
11	0.1950	-0.0062	-0.0012164	0.1946	-0.0057	-0.0011185
12	-0.2824	0.0046	-0.0012958	-0.2865	0.0046	-0.0013134
13	0.0702	0.0003	0.0000236	0.0704	0.0003	0.0000207
14	0.0074	0.0056	0.0000416	0.0009	0.0053	0.0000047
15	-0.1350	-0.0003	0.0000422	0.1402	0.0003	0.0000047
16	-0.0296	0.0024	-0.0000714	0.0801	-0.0023	-0.0001393
17	-0.0591	0.0016	-0.0000924	0.0497	-0.0015	-0.0000724
18	-0.0694	-0.0009	0.0000633	0.0689	0.0011	0.0000078
19	-0.0595	-0.0010	0.0000568	0.0575	0.0007	0.0000406
20	0.0444	0.0014	0.0000605	0.0443	0.0015	0.0000650

Table.4 Displacement "X" of "Node 52"

	Lumped mass	Consistent mass
RMS	7.924 ^{mm}	8.054 ^{mm}
CQC	8.162 ^{mm}	8.296 ^{mm}

6. まとめ

1) 集中質量法と整合質量法における応答変位値への影響は3%であり、Table.4から質量マトリックスが刺激係数を介して、RMS法とCQC法とが連成における結果を示しているが、本ケースの場合についてはどの手法を用いても良いと思われる。

2) 固有値計算と応答計算手法の組み合わせでは、整合質量法とCQC法の組み合わせが離散系問題における近似解としては厳密解に近く、一番良い精度と思う。

3) 連続質量法を厳密解 1.0とするならば、Fig.4 で解る様に整合質量法が厳密解に近い(≈ 1.0)比率を示している。集中質量法は総節点 80,37と 2ケースで比べているが集中質量法の37節点では10次以降からのバラつきが見られる。これらの結果から連続質量法の計算量の膨大さを考えれば、近似解法においてモードの重ね合わせ次数の 2倍程度のモデル化で十分な精度が得られるのではないかとと思われる。

以上の事から、離散系における近似解は整合質量法が最も良い精度であると考えらる。

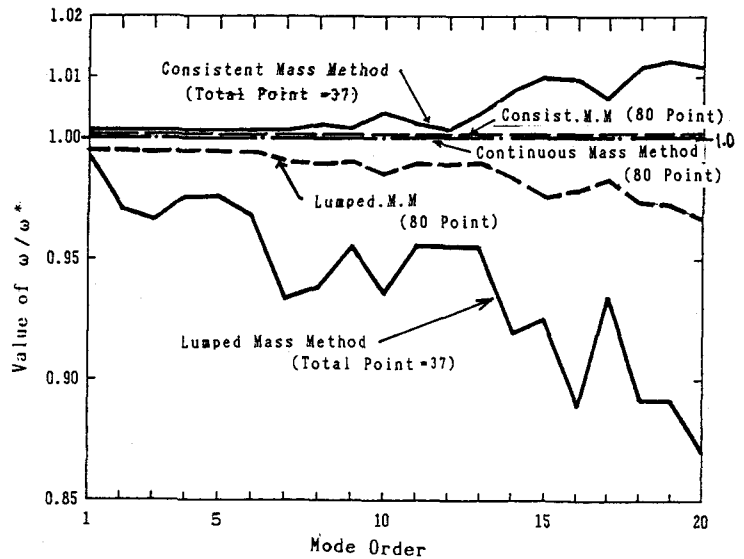


Fig.4 Accuracy of Natural Circular Frequency

(参考文献)

- 1) Clough, R.W./Penzien, J : Dynamics of Structures
- 2) E.L.Wilson et al.: "A Replacement for the Stress Method Seismic Analysis". Earthquake, Eng. Struct. Dyn. 9, 187-194 (1981)
- 3) T. Hayashikawa and N. Watanabe: "Free Vibration Analysis of Continuous Beam". Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 5, May, 1985, 639-652
- 4) 林川, 渡辺: 連続質量法による多径間連続桁の固有振動解析. 土木学会第39回学術講演会講演概要集, 491-492 (1984)
- 5) 林川: アーチ系橋梁構造物の固有振動解析に関する研究. 土木学会北海道支部論文報告集第41号, 69-72 (1985)
- 6) Y. Matsui et al.: "Dynamic Analysis of A Five Span Continuous Rigid-Frame Bridge With V-Legs". Proceedings of The Seventh Japan Earthquake Engineering Symposium, 1921-1926 (1986)
- 7) 松井, 他: 5径間連続V橋脚ラーメン橋の動的振動解析. 土木学会第41回学術講演会講演概要集, 857-858 (1986)
- 8) 松井: 応答スペクトル解析におけるCQC法の適用. 土木学会北海道支部第43号 (1987)