

(107) 非線形フォークト体ラーメンの振動について

日本大学大学院 学員 本屋敷繁寿
 日本大学生産工学部 正員 能町純雄
 日本大学生産工学部 正員 木田哲量
 日本大学生産工学部 正員 澤野利章

1. はじめに

一般的に、構成材料の応力-ひずみ関係が非線形な力学特性を有する構造体が振動を受けた場合にバネ軟化の現象が現れることが知られている。本論文は、門型ラーメンが水平振動力を強制された場合の水平地盤加速度に対する応答変位と応答モーメントに関する非線形解析を試みるものである。

解析モデルは図-1に示すような非線形バネとダッシュボットとを並列させた非線形フォークト体としての力学特性を有する材料を柱材とした一層式ラーメンとする。さらに、門型ラーメンの振動質量は離散系とし、上部横ばりはその剛性が無限大で、柱材下端は非常に剛な地盤に固定支持されているものとする。

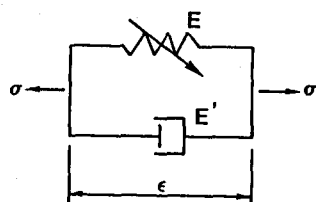


図-1 非線形フォークト体

2. 復元応力

非線形バネにおける外力の作用によって生ずるひずみ ε とこれに対応する復元応力 σ の関係を式(1)のように仮定した。

$$\sigma = K\varepsilon - B\varepsilon^3 \quad (1)$$

まず、式(1)における定数 K 、 B を次のように定める。柱材の初期応力は弾性力であるので定数 K は柱材の弾性係数 E とする。つぎに、復元作用が存在するひずみの範囲、つまり門型ラーメンが崩壊する直前までのひずみ範囲における応力が最大値となるときのひずみ値を ε_0 とすれば、

$$\partial \sigma / \partial \varepsilon = 0 \text{ から、 } B = E / 3\varepsilon_0^2 \text{ とする。}$$

すなわち、非線形バネのひずみと復元応力の関係は次式で示される。(図-3; 参照)

$$\sigma = E \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon_0^2} \right) \quad (2)$$

したがって、非線形フォークト体からなる柱材が外力の作用を受けた場合の復元応力 σ はひずみ ε に対して非線形なダフフィン形応力と粘性抵抗の和であることから、式(3)で示される。

$$\sigma = E \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon_0^2} \right) + E' \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3)$$

ここで、 E ; 柱材の弾性係数、 ε_0 ; 最大静的応力に対するひずみ値、 E' ; 柱材の粘性係数、 t ; 時間

3. 運動方程式

柱部材における曲げモーメントについて解析する。柱部材の断面においては、平面保持の法則が成り立つものと仮定するならば、中立軸からの距離 z におけるひずみ ε は曲率半

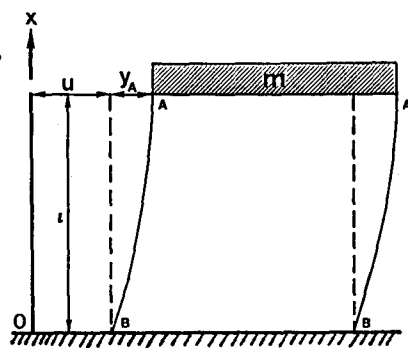


図-2 門型ラーメンモデル

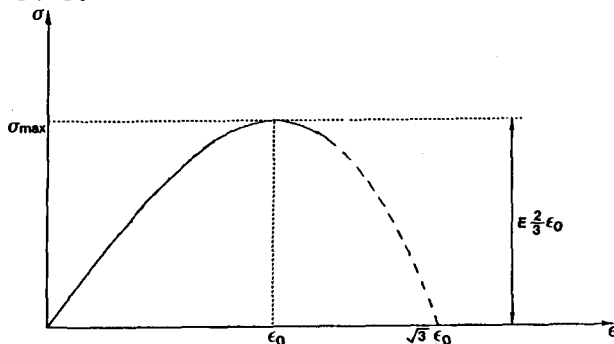


図-3 復元応力

径を ρ とするならば、 $\varepsilon = \xi / \rho$ で与えられる。したがって、この断面の中立軸に関する曲げモーメント M は式(3)の関係より次式で表すことができる。

$$M = \int_A \xi \sigma dA = \int_A \left\{ \xi E \left(-\frac{\xi}{\rho} - \frac{\xi^3}{3\rho^3 \varepsilon_0^3} \right) + \xi E' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) \right\} dA \quad (4)$$

ここで、 $I = \int_A \xi^2 dA$ 、 $I' = \int_A \xi^4 dA$ とすれば、式(4)はつぎようになる。

$$M = \frac{EI}{\rho} - \frac{EI'}{3\rho^3 \varepsilon_0^3} + E'I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (5)$$

さらに、 $-\kappa = 1/\rho$ 、 $\kappa_0 = \varepsilon_0^3 (I/I')$ とおくと式(5)はつぎようになる。

$$M = - \left\{ EI \kappa \left(1 - \frac{\kappa^2}{3\kappa_0^2} \right) + E'I \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right\} \quad (6)$$

ここで、 κ ；柱部材断面の曲率、 EI ；柱材の曲げ刚性、 κ_0 ； ε_0 を与えるときの曲率

そこで、解析モデルにおける左右の柱は同一の断面構成であるとし、柱の両端A、Bにおけるslopeは0であって、変位を位置 x の3次式と仮定して、柱材の水平たわみ y を式(7)で与える。

$$y = y_B \left(2 \frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} + 1 \right) + y_A \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (7)$$

よって、上式より、柱部材断面の曲率 κ は式(8)として得られる。

$$-\kappa = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{6(y_B - y_A)}{l^2} \left(2 \frac{x}{l} - 1 \right) \quad (8)$$

ここで、 y_A 、 y_B ；柱材端A、Bのたわみ

つぎに、解析モデルにおける着目点は柱材上端A($x=l$)であり、柱材下端Bは固定端($y_B=0$)であることから、

$$\kappa = 6y_A/l^2 \quad \text{となる。}$$

したがって、柱材上端Aの節点曲げモーメント M_A は式(9)となる。

$$M_A = - \frac{6EI}{l^2} y_A \left\{ \eta \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) + \frac{E'}{E} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \quad (9)$$

ただし、 $y_A = l^2 \kappa_0 / 6$ 、 $\eta = y_A / y_0$

さて、水平たわみに対する横ばり直下の断面A-Aに関する力のつりあい条件は式(10)で与えられ、点Aにおける力のつりあい条件は式(11)で与えられる。(図-4；参照)

$$2Q = m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_A}{\partial t^2} \right) \quad (10)$$

$$Ql = 2M_A \quad (11)$$

ここで、 Q ；柱材上端のせん断力、 m ；門型ラーメンの振動質量、 u ；地盤水平変位、 l ；柱材の長さ、 M_A ；点Aの節点曲げモーメント

よって、式(9)、(10)、(11)から断面A-Aにおける運動方程式は次のようになる。

$$- \frac{24EI}{l^3} y_0 \left\{ \eta \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) + \frac{E'}{E} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} = m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \quad (12)$$

4. 変位応答曲線

点Aにおける水平たわみ y_A 、地盤水平変位 u および無次元たわみ η をそれぞれ時間 t の調和関数で表すこと

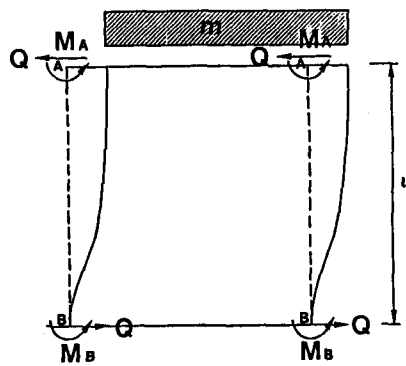


図-4 力のつり合い

にする。

$$y_a = \bar{y}_a \sin \omega t \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -p \sin(\omega t + \alpha) \quad (14)$$

$$\eta = \bar{\eta} \sin \omega t \quad (15)$$

式(12)に式(13), (14), (15)を代入して展開するならば式(16)を得る。

$$\bar{\eta} \left\{ \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4}\right) - \xi^2 \right\} \sin \omega t + 2h\xi \bar{\eta} \cos \omega t = P \sin(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

ここで, $\xi^2 = (m \ell^3 / 24 EI) \omega^2$, $(E'/E) \omega = 2h\xi$, $P = m \ell^3 p / 24 EI y_0$

さらに, 式(16)における $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の項に関する関係式から, 次の式を得ることができる。

$$\bar{\eta}^2 \left[\left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4} - \xi^2\right)^2 + 4h^2 \xi^2 \right] = P^2 \quad (17)$$

この式(17)において, 無次元入力加速度 P をパラメーターとすれば, 無次元周波数 ξ と無次元応答変位 η の曲線が得られる。(図-5, 6)

5. 節点曲げモーメントの振幅

柱材上端Aにおける節点曲げモーメント M_a は式(9)に式(15)を代入するならば, 次のように示すことができる。

$$M_a = - \frac{6EI}{\ell^2} y_0 \bar{\eta} \left\{ \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4}\right) \sin \omega t + 2h\xi \cos \omega t \right\} \quad (18)$$

さらに, 節点曲げモーメント M_a も時間 t の調和関数として表すことができる。

$$M_a = M \sin(\omega t + \beta) \quad (19)$$

式(18)に式(19)を代入した式における $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の項に関する関係式から, 節点曲げモーメント M_a の振幅 M を得る。(図-7, 8)

$$M = \left(\frac{6EI}{\ell^2} y_0 \right) \bar{\eta} \left\{ \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4}\right)^2 + 4h^2 \xi^2 \right\}^{1/2} \quad (20)$$

6. 履歴応答曲線

本モデルにおける無次元たわみ η に対する無次元曲げモーメント μ の履歴について求めることとする。式(18)は節点曲げモーメントと無次元応答変位の関係を表している。そこで, 式(15)から,

$$\sin \omega t = \frac{\eta}{\bar{\eta}}$$

$$\cos \omega t = \left\{ 1 - \left(\frac{\eta}{\bar{\eta}} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

なる関係を得て, これを式(18)に代入すると, 次式を得る。

$$\mu + \eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4} \right) = -2h\xi \bar{\eta} \left\{ 1 - \left(\frac{\eta}{\bar{\eta}} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (21)$$

ここで, $\mu = M \ell^2 / 6EI y_0$

つぎに, 式(21)の両辺を2乗する。

$$\mu^2 + 2\mu\eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4} \right) + \eta^2 \left(1 - \frac{\bar{\eta}^2}{4} \right)^2 - 4h^2 \xi^2 \bar{\eta}^2 + 4h^2 \xi^2 \eta^2 = 0 \quad (22)$$

この μ に関する2次式(22)が非線形フォークト体における無次元曲げモーメント μ の履歴応答曲線を与える。(図-9, 10)

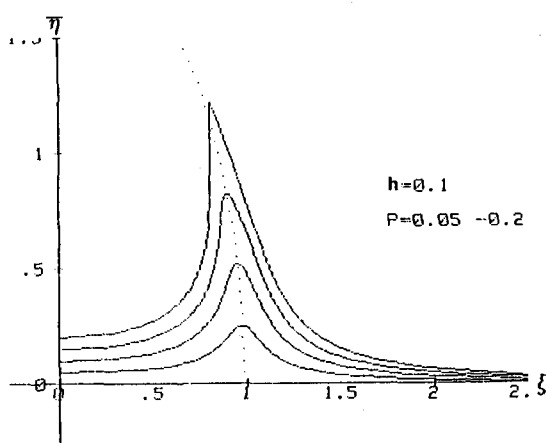


図-5 応答変位曲線 ($h=0.1$)

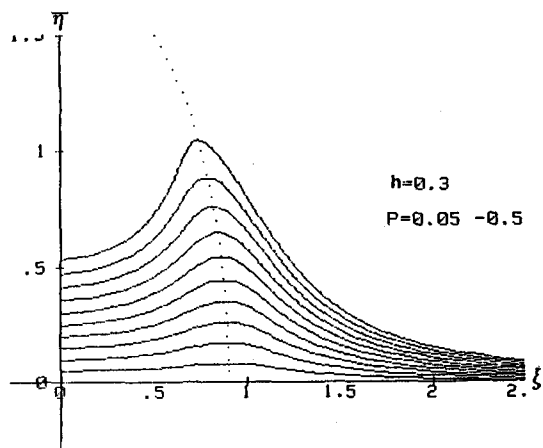


図-6 応答変位曲線 ($h=0.3$)

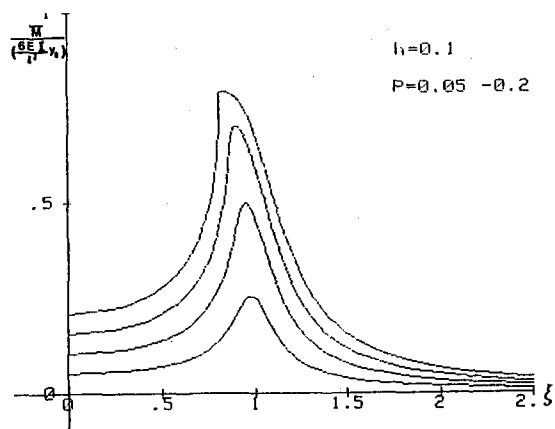


図-7 節点曲げモーメント振幅曲線 ($h=0.1$)

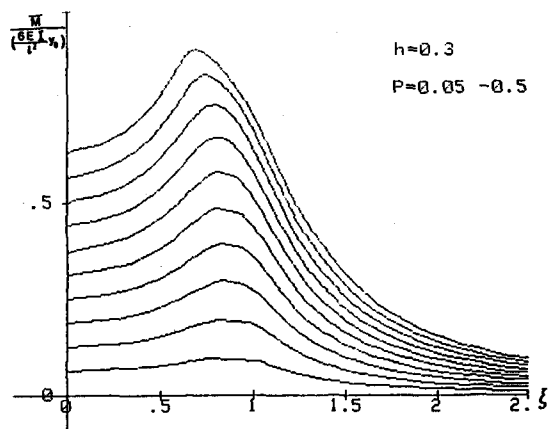


図-8 節点曲げモーメント振幅曲線 ($h=0.3$)

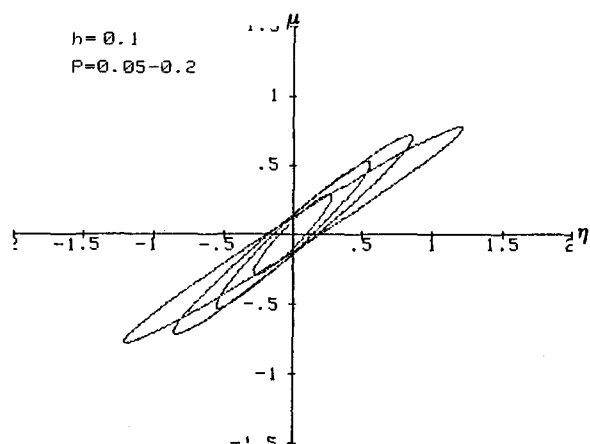


図-9 履歴応答曲線 ($h=0.1$)

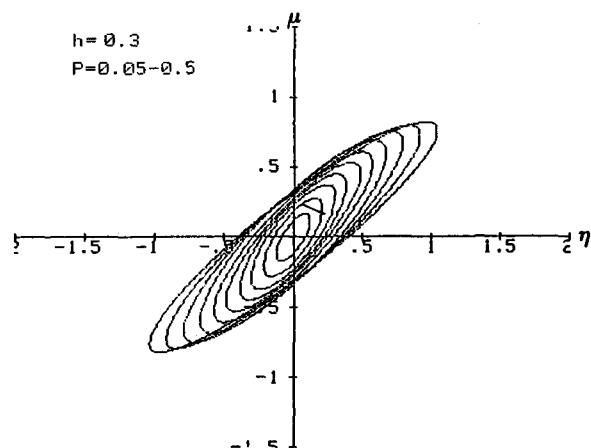


図-10 履歴応答曲線 ($h=0.3$)