

(106) 境界要素法の軸対称動的力学問題への応用

豊橋技術科学大学 蔣 通
豊橋技術科学大学 正会員 栗林栄一

1、はじめに

軸対称静的力学問題における境界要素法の適用はいくつかの研究がある。方法論として二種類の取り扱い手法があげられる。一つはリング状線荷重に応じる基本解を利用する方法である^{1), 2)}。もう一つは曲線座標系の境界積分方程式を用いてその離散化境界要素方程式に対して適当な変換を行うと独立しているサブ・マトリックス系方程式組に分解する方法である^{3), 4)}。二番めの方法ではCartesian座標系における基本解はそのまま利用することができる。

三次元弾性動的力学問題には幾何軸対称問題はたくさんあるが(例えば円柱形とリング状基礎の動的相互作用、地震波入射による軸対称不整形地盤の挙動など)、このような問題における境界要素法の適用に関する研究はまだ少ない。本文では、幾何軸対称弾性動的力学境界要素法問題について、定式化を行い、三次元軸対称不整形地盤の斜入射平面波に対する応答を解析した。

2、直交曲線座標系における境界積分方程式

直交曲線座標系における周波数領域の弾性動的力学問題の境界積分方程式は次のように表される。

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} u_j(Q)T_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) \quad (1)$$

ここで、 $T_{ij}(S, Q)$ と $U_{ij}(S, Q)$ はソース点 S において $\bar{g}_i(S)$ 方向に単位力 $e^{i\omega t}$ を加えるとき、境界上 Q 点において $\bar{g}_j(Q)$ 方向に生じた表面力と変位である。 $\bar{g}_i$ と $\bar{g}_j$ とは直交曲線座標の基本ベクトルである。滑かな境界において $C_{ij} = 1/2 \delta_{ij}$ 。

直交曲線座標系における基本解はCartesian座標系に応じる基本解のcomponentsをスーパーインボースすることによって得られる。

$$U_{ij}(S, Q) = \beta_{im}(S) U_{ml}^*(S, Q) \beta_{lj}^*(Q) \quad (2)$$

$$T_{ij}(S, Q) = \beta_{im}(S) T_{ml}^*(S, Q) \beta_{lj}^*(Q) \quad (3)$$

(2), (3)式において, summation conventionは適用される。 $T_{ml}^*(S, Q)$ と $U_{ml}^*(S, Q)$ はCartesian座標系における基本解である。 $\beta_{im}(S) = \cos(\bar{g}_i(S), \bar{x}_m)$, $\beta_{lj}^*(Q) = \cos(\bar{g}_j(Q), \bar{x}_l)$ 。

そうすると、直交座標系における基本解は次のようになる。

$$U_{ij}(S, Q) = 1/4\pi\mu[\psi A_{ij} - \chi B_{ij}] \quad (4)$$

$$T_{ij}(S, Q) = 1/4\pi\{(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r})(A_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + D_{ij}) - \frac{2}{r}\chi(C_{ij} - 2B_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}) - 2\frac{d\chi}{dr}B_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + (v_p^2/v_s^2 - 2)(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{2}{r}\chi)C_{ij}\} \quad (5)$$

ここで、 $r=|\vec{SQ}|$ ψ χ の算式は文献⁵⁾を参照されたい。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \cos(\bar{g}_i(S), \bar{g}_j(Q)) \\ B_{ij} &= \cos(\bar{r}, \bar{g}_i(S)) \cos(\bar{r}, \bar{g}_j(Q)) \\ C_{ij} &= \cos(\bar{r}, \bar{g}_i(S)) \cos(\bar{n}, \bar{g}_j(Q)) \\ D_{ij} &= \cos(\bar{n}, \bar{g}_i(S)) \cos(\bar{r}, \bar{g}_j(Q)) \end{aligned} \quad (6)$$

3、変換と分解

説明の便宜上、軸対称不整形地盤の入射波に対する応答問題 (Fig.1) について述べることにする。

円周方向について N 個軸対称エレメントに分け、各軸対称エレメントについてまた M 個nodesに分ける。

入射波による境界上各エレメントの変位と表面力の円筒座標系における離散化境界積分方程式は次のように書ける

$$[T]\{u\} = [T]\{u_f\} - [U]\{t_f\} \quad (7)$$

ここで、 $\{u_f\}$ と $\{t_f\}$ は free field 変位と表面力を表わし、

$[T]$ 及び $[U]$ は次のような対称性を持つ。

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_1]_{3m \times 3m} & [H_2]_{3m \times 3m} & \cdots & [H_n]_{3m \times 3m} \\ [H_n]_{3m \times 3m} & [H_1]_{3m \times 3m} & \cdots & [H_{n-1}]_{3m \times 3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H_2]_{3m \times 3m} & [H_3]_{3m \times 3m} & \cdots & [H_1]_{3m \times 3m} \end{bmatrix} \quad (H=T, U) \quad (8)$$

(7)に対して次のような変換を行う。

$$\{u\} = [R]\{\bar{u}\}, \{u_f\} = [R]\{\bar{u}_f\}, \{t_f\} = [R]\{\bar{t}_f\} \quad (9)$$

ここで、変換マトリックスは次のように定義する。

$$[R] = [R_{lk}]_{n \times n}, [R_{lk}] = [I]_{3m \times 3m} e^{i(1-l)(k-1) \frac{2\pi}{n}} \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (10)$$

(9)式を(7)式に適用すると、次のような式が得られる。

$$[\bar{T}]\{\bar{u}\} = [\bar{T}]\{\bar{u}_f\} - [\bar{U}]\{\bar{t}_f\} \quad (11)$$

ここで、 $[\bar{T}] = [R^*][T][R]$, $[\bar{U}] = [R^*][U][R]$ 、

$[R^*]$ は $[R]$ の共役複素数マトリックスである。

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} [\bar{H}_{11}]_{3m \times 3m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\bar{H}_{22}]_{3m \times 3m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\bar{H}_{nn}]_{3m \times 3m} \end{bmatrix} \quad (\bar{H}=\bar{T}, \bar{U}) \quad (12)$$

$$[\bar{H}_{kk}] = \sum_{j=1}^n [H_j] e^{i(j-1)(k-1) \frac{2\pi}{n}} \quad (13)$$

独立している方程式は次のようになる。

$$[\bar{T}_{kk}]\{\bar{u}_k\} = [\bar{T}_{kk}]\{\bar{u}_{fk}\} - [\bar{U}_{kk}]\{\bar{t}_{fk}\} = \{\bar{u}_{fk}\} \quad (k=1, n) \quad (14)$$

$$\text{ここで、} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_{fk}\} \\ \{\bar{t}_{fk}\} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \{u_{fj}\} \\ \{t_{fj}\} \end{Bmatrix} e^{-i(j-1)(k-1) \frac{2\pi}{n}} \quad (15)$$

(8)式のような $3mn \times 3mn$ の方程式は(14)式のような n 個 $3m \times 3m$ の方程式組に変わった。計算機の

CPU は少なくとも n 倍短縮することができる。

4. Alluvial deposit の場合

1 と 2 媒質に対して (Fig.2) それぞれ境界積分方程式を立て、前と同じような変換を行うと次のような独立している方程式が得られる。

$$2[\bar{T}_{kk}]_2 \{\bar{u}_k\} - 2[\bar{U}_{kk}]_2 \{\bar{e}_k\} = \{\bar{u}_{fk}\} \quad (3m \times 3m, m=q+p), (k=1, n) \quad (16)$$

$$1[\bar{T}_{kk}]_1 \{\bar{u}_k\} - 1[\bar{U}_{kk}]_1 \{\bar{e}_k\} = 0 \quad (3l \times 3l, l=r+p), (k=1, n) \quad (17)$$

共同境界において次の連続条件が成り立つ。

$$2\{\bar{u}_k\}_{3p} = 1\{\bar{u}_k\}_{3p}, \quad 2\{\bar{e}_k\}_{3p} = -1\{\bar{e}_k\}_{3p}$$

それを利用して次の方程式組になる。

$$\begin{bmatrix} 2[\bar{T}_{kk}]_{qq} & 2[\bar{T}_{kk}]_{qp} & -2[\bar{U}_{kk}]_{qp} & 0 \\ 2[\bar{T}_{kk}]_{pq} & 2[\bar{T}_{kk}]_{pp} & -2[\bar{U}_{kk}]_{pp} & 0 \\ 0 & 1[\bar{T}_{kk}]_{pp} & 1[\bar{U}_{kk}]_{pp} & 1[\bar{T}_{kk}]_{pr} \\ 0 & 1[\bar{T}_{kk}]_{rp} & 1[\bar{U}_{kk}]_{rp} & 1[\bar{T}_{kk}]_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_k\}_q \\ \{\bar{u}_k\}_p \\ \{\bar{e}_k\}_p \\ \{\bar{u}_k\}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_{fk}\}_q \\ \{\bar{u}_{fk}\}_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (k=1, n) \quad (18)$$

ここで、subscript q, p, r はそれぞれの境界にあるエレメントに関連するマトリックスを指し、1, 2 はそれぞれ 1 と 2 の medium を意味する。

5. 数値例

Fig.3のような alluvial deposit に対して解析をしてみた。その形は $z=h[1-3\xi^2+2\xi^3]$ で表し、 h は deposit の深さで、 $h/a=0.5$, $\xi=\sqrt{(x^2+y^2)}/a$, $\mu_1/\mu_2=0.25$, $\rho_1/\rho_2=0.75$, $\nu_1=0.3$ and $\nu_2=0.25$ 。 $a_0=\omega a/Vs_2=\pi$ において SV 平面波の入射による地表面の水平と垂直変位を求めた。入射角 $=0^\circ$ のとき、文献⁶⁾との照合は Fig.3 に示し、かなり一致していることがわかった。文献⁶⁾の計算でできない入射角 $=30^\circ$ の斜め入射についての結果は Fig.4 に示した。

さらに三つの媒質の alluvial deposit について解析をしてみた。その形はそれぞれ $z_1=h_1[1-5\xi^2+2\xi^3]$, $z_2=h_2[1-3\xi^2+2\xi^3]$ で表し、 h_1, h_2 は deposit 1 と 2 の深さで $h_1=0.25a$, $h_2=0.5a$, $\mu_1/\mu_2=\mu_2/\mu_3=0.25$, $\rho_1/\rho_2=\rho_2/\rho_3=0.75$, $\nu_1=0.4$, $\nu_2=0.3$, $\nu_3=0.25$ 。同じ $a_0=\omega a/Vs_3=\pi$ において SV 平面波の入射による地表面の水平と垂直変位を求めた。入射角 $=0^\circ, 30^\circ$ のときの結果は Fig.5 と Fig.6 に示した。やわらかい deposit 3 の存在によって十数倍の増幅率が表われたことがわかった。

6. おわりに

本文では境界要素法の幾何軸対称弾性動的力学問題への適用について検討し、地震波の斜め入射によって不整形地盤の挙動を調べた。勿論その手法は円柱形とリング状基礎を持つ構造物と地盤の相互作用にも容易に応用できる。

7. 文献

- 1) Hartmann, F., "Progress in Boundary Element Methods", Vol.1, Chapter 4, Pentech Press, London, 1981.
- 2) Mayr, M., Drexler, W. and Kuhn, G., "A Semianalytical Boundary Integral Approach for

Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Condition", Int.J. Solids Struct., Vol.16., 1980., pp863-871.

3) Au, M. C. and Brebbia, C. A., "A Three Dimensional Boudary Approach for Rotationally Symmetric Problems", Proc. Fifth Conf. Boundary Elements, Hiroshima, Japan, 1983.

4) Li, B. C. and Brebbia, C. A., "The Solution of Axisymmetric Boundary Elements Problems Using Curilinear Coordinate Systems", Proc. Seventh Conf. Boundary Elements, Villa Olmo, Italy, 1985.

5) Dominquez, J., "Progress in Boundary Element Methods", Vol.1, Chapter 7, Penteth Press, London, 1981.

6) Sánchez-sesma, F. J. et al., "Scattering of Elastic Wave by Three Dimensional Topographies", 8WCEE, 1984., pp639-645.

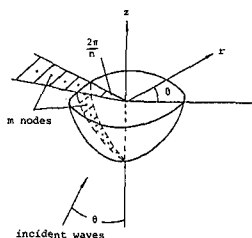


Fig.1 A axisymmetric irregular topography

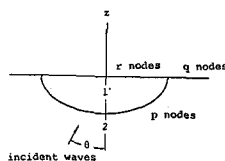


Fig.2 Alluvial deposit with two media

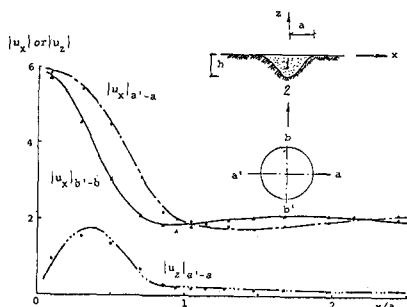


Fig.3 Comparison with results of reference 6)

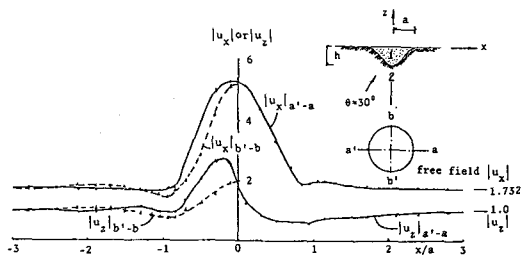


Fig.4 Surface amplitudes of alluvial deposit with two media for obliquely incident SV wave

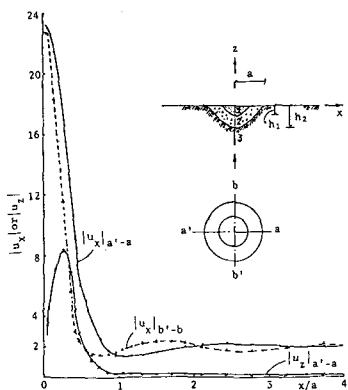


Fig.5 Surface amplitudes of alluvial deposit with two media for vertically incident SV wave

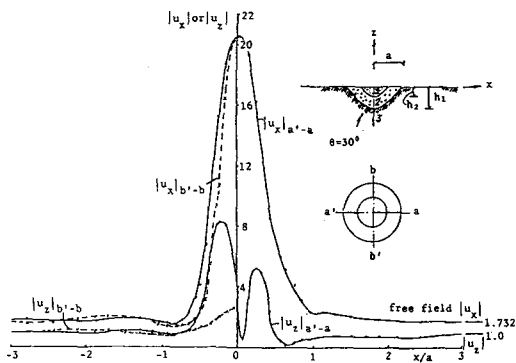


Fig.6 Surface amplitudes of alluvial deposit with tree media for obliquely incident SV wave