

徳島大学工学部 平尾 潔
徳島大学工学部 成行 義文

1. まえがき

近年、強震下における構造物の損傷の程度を表わす良好な指標と考えられる履歴吸収エネルギーに着目した研究が1自由度系を中心として盛んに行なわれている^{1),2)}。構造物の許容吸収エネルギー量とこの履歴吸収エネルギー量との対比により、より合理的な構造物の耐震設計が可能となるものと思われる。一方、多自由度系に関しては、入力エネルギーに着目した研究はかなり成されているものの^{3),4)}、履歴吸収エネルギーについてはあまり検討されていない。そこで、本研究では、せん断型多自由度履歴構造物の入力エネルギーおよび履歴吸収エネルギーに及ぼす各種パラメーターの影響等をより一般的に検討するための基礎的研究として、運動方程式を正規化することにより、系の応答を支配すると思われる構造特性パラメーターを設定し、それらのパラメーターを2・3変化させて、それらが種々のエネルギー比等に及ぼす影響について若干の比較検討を試みた。

2. 多自由度系の運動方程式の正規化

Fig. 1 のようなせん断型多自由度履歴構造物の運動方程式は周知のように次式で表わされる。 $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} + \{u\} = -[m]\{1\}\ddot{x}_0$ — (1)
ここで $[m]$, $[c]$, 及び $[k]$ はそれぞれ質量, 粘性減衰, 及び剛性マトリクスを表わし, $\{x\}$, $\{\dot{x}\}$, $\{\ddot{x}\}$, $\{u\}$, 及び $\ddot{x}_0$ はそれぞれ相対変位ベクトル, 相対速度ベクトル, 相対加速度ベクトル, 荷重項ベクトル, 及び地動加速度を表わしている。また, 各層の復元力特性はFig. 2に示すようなbilinear型とし, 図中の Q_i , $\bar{x}_i$, k_{oi} , γ_i , Q_{yi} , 及び $\bar{x}_{yi}$ はそれぞれ i 層のせん断力, 層間変位, 初期剛性, 弾塑性剛性比, 降伏せん断力, 及び降伏層間変位を表わしている。

ここで, 系の応答を支配するパラメーターを明確にするために, 式(1)を以下のような手順で正規化する。まず, 式(2)のような変換マトリクス $[D]$ を導入し, これを用いて相対変位, 相対速度, 及び相対加速度をそれぞれ層間変位, 層間速度, 及び層間加速度で表わすと式(3)のようになる。

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2)} \quad \left. \begin{aligned} \{x\} &= [D]^T \{\bar{x}\} \\ \{\dot{x}\} &= [D]^T \{\dot{\bar{x}}\} \\ \{\ddot{x}\} &= [D]^T \{\ddot{\bar{x}}\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

同時に, $[c]$ 及び $[k]$ を, 粘性減衰係数 c_i あるいは剛性 k_i ($i=1 \sim n$)を対角要素とする対角マトリクス $[C]$ 及び $[K]$ で表わすと式(4)のようになる。

$$[c] = [D]^{-1} [C] ([D]^T)^{-1}, [k] = [D]^{-1} [K] ([D]^T)^{-1} \quad \text{--- (4)}$$

また, 荷重項ベクトル $\{u\}$ も $[D]$ を用いて式(5)のように表わされる。

$$\{u\} = [D]^{-1} \{U\} \quad (\text{但し}, \{U\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}) \quad \text{--- (5)}$$

式(3)~(5)を式(1)に代入し, $[C] = (2h/\omega_0)[K_0]$ (但し, $[K_0]$ は, k_{oi} ($i=1 \sim n$)を対角要素とする対角マトリクス, h 及び ω_0 は1次モードの減衰定数及び固有円振動数)とすると, 層間変位に関する運動方程式が式(6)のように得られる。

$$[m][D]^T \{\ddot{\bar{x}}\} + (2h/\omega_0)[D]^{-1} [K_0] \{\bar{x}\} + [D]^{-1} [K] \{\bar{x}\} + [D]^{-1} \{U\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_0 \quad \text{--- (6)}$$

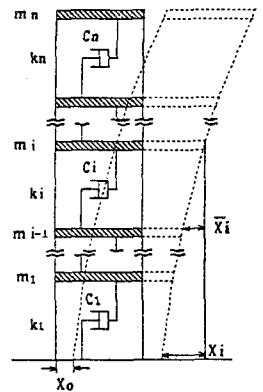


Fig. 1 せん断多自由度系

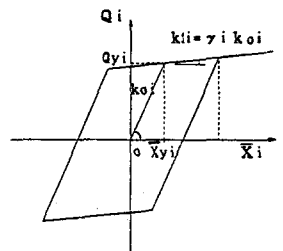


Fig. 2 bilinear復元力特性

式(6)の両辺を $m_i(\omega_{0i}/\omega_s)^2 \ddot{x}_{yi}$ ($=k_{0i} \ddot{x}_{yi}/\omega_s^2 = Q_{yi}/\omega_s^2$, 但し, $\omega_{0i} = (k_{0i}/m_i)^{1/2}$, ω_s = 入力波の卓越円振動数)で除し, 式(7)のような置換えを考慮すると式(8)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p &= \omega_s/\omega_{0i}, \quad \rho = \omega_{0i}/\omega_{01}, \quad y_i = \ddot{x}_i/\ddot{x}_{y1}, \quad \dot{y}_i = \dot{x}_i/\dot{x}_{y1} \\ \ddot{y}_i &= \ddot{x}_i/\ddot{x}_{y1}, \quad v_i = u_i/Q_{y1}, \quad z_i = \ddot{x}_0/\ddot{x}_{y1}, \quad \alpha_i = m_i/m_1 \\ \beta_i &= k_{0i}/k_{01}, \quad \xi_i = \ddot{x}_{yi}/\ddot{x}_{y1}, \quad \nu_i = k_i/k_{01} \text{ (但し, } k_i = k_{0i} \text{ or } \gamma_i k_{0i}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$p^2 \rho^2 [\alpha][D]^T [\xi] \{ \dot{y} \} + 2 h \omega_s p [D]^{-1} [\beta] [\xi] \{ y \} + \omega_s^2 [D]^{-1} [\beta] [\nu] [\xi] \{ y \} + \omega_s^2 [D]^{-1} [\beta] [\xi] \{ v \} = -p^2 \rho^2 [\alpha] \{ 1 \} z_0 \quad (8)$$

ここで, $\{y\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{\ddot{y}\}$, および $\{v\}$ は, それぞれ y_i , $\dot{y}_i$, $\ddot{y}_i$, および v_i ($i=1 \sim n$) を要素とする列ベクトルであり, $[\alpha]$, $[\beta]$, および $[\xi]$ は, それぞれ, α_i , β_i , および ξ_i ($i=1 \sim n$) を対角要素とする対角マトリクスである。

式(8)において $t = p \tau$ (t は時刻) なる変換を行なうと, 最終的に各層の降伏層間変位で正規化された層間変位 y に関する運動方程式が式(9)のように得られる。

$$[M_i] \{ \ddot{y} \} + [C_i] \{ \dot{y} \} + [K_i] \{ y \} + \{ U_i \} = -[M_i] \{ 1 \} z \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } [M_i] &= \rho^2 [\alpha][D]^T [\xi], & [C_i] &= 2 h \omega_s [D]^{-1} [\alpha] [\xi] [\xi] \\ [K_i] &= \omega_s^2 [D]^{-1} [\alpha] [\xi] [\nu] [\xi], & \{ U_i \} &= \omega_s^2 [D]^{-1} [\alpha] [\xi] [\xi] \{ v \} \\ [M_i] &= (a \omega_s^2 / \alpha_i) [\alpha], & [\xi] &= [\alpha]^{-1} [\beta] \\ \alpha_i &= \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \dot{y}_i = p \dot{y}_1, \quad \ddot{y}_i = p^2 \ddot{y}_1, \quad a = (\sum_{j=1}^n m_j) \ddot{x}_{0, \max} / Q_{y1} \\ z &= \ddot{x}_0 / \ddot{x}_{0, \max} \quad (\text{ただし, } \ddot{x}_0(\tau) = p^2 \ddot{x}_0(t)) \end{aligned}$$

式(9)より, 系の応答は, 質量比分布 (α_i), 降伏変位比分布 (ξ_i), 重剛比分布 ($\xi_i = (k_{0i}/m_i)/(k_{01}/m_1)$), 弾塑性剛性比分布 (γ_i), 降伏強度比 (a), 入力波の卓越周期 ($T_s = 2\pi/\omega_s$), 減衰定数 (h), 円振動数比 (p) に支配されていることがわかる。

3. エネルギー釣合式

エネルギー釣合式を導くために, $\{\dot{s}\} = [D]^T [\xi] \{ \dot{y} \}$, $\{s\} = [\xi] \{ y \}$, $\{\dot{s}\} = [\xi] \{ \dot{y} \}$ なる変換を施した式(9)の両辺に左から $\{\dot{s}\}^T$ を乗じ地動継続時間 ($0 \sim \tau$) で積分すると, 式(10)のような正規化されたエネルギー釣合式が得られる。なお, $\{\dot{s}\} = \{\dot{s}\}^T [D]^{-1}$ である。

$$\sum_{i=1}^n (\rho^2 \alpha_i \int_0^\tau \dot{s}_i \xi_i d\tau) + \sum_{i=1}^n (2 h \omega_s \alpha_i \xi_i \int_0^\tau \dot{s}_i^2 d\tau) + \sum_{i=1}^n (\omega_s^2 \alpha_i \xi_i \nu_i \int_0^\tau \dot{s}_i \xi_i d\tau + \omega_s^2 \alpha_i \xi_i \xi_i \nu_i \int_0^\tau \dot{s}_i d\tau) = - \sum_{i=1}^n a \omega_s^2 (\alpha_i / \alpha_i) \int_0^\tau \dot{s}_i z d\tau \quad (10)$$

ここで, 質点 i の運動エネルギーを W_{Ki} , 質点 i を介して入力される入力エネルギーを E_i , また, i 層における減衰エネルギー, 弾性ひずみエネルギー, 及び履歴吸収エネルギーをそれぞれ W_{Di} , W_{Ei} , W_{Hi} とすると, 式(10)は, 次式のように表わされる。ここでバーは正規化された量であることを示している。

$$\sum_{i=1}^n \bar{W}_{Ki} + \sum_{i=1}^n \bar{W}_{Di} + \sum_{i=1}^n (\bar{W}_{Ei} + \bar{W}_{Hi}) = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i \quad (11)$$

$$\text{ただし, } \bar{W}_{Ki} = (1/2) \rho^2 \alpha_i (\sum_{j=1}^n \dot{y}_j \xi_j)^2, \quad \bar{W}_{Di} = 2 h \omega_s \alpha_i \xi_i \xi_i \int_0^\tau \dot{y}_i^2 d\tau$$

$$\bar{W}_{Hi} = \omega_s^2 \xi_i \int_0^\tau Q_i d y_i, \quad \bar{E}_i = -a \omega_s^2 (\alpha_i / \alpha_i) \int_0^\tau (\sum_{j=1}^n \dot{y}_j \xi_j) z d\tau$$

地震応答終了時には, 運動エネルギー, 及び弾性ひずみエネルギーは 0 になるため式(11)は次式のようになる。

$$\sum_{i=1}^n \bar{W}_{Di} + \sum_{i=1}^n \bar{W}_{Hi} = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i \quad (12)$$

また, i 層に分配される入力エネルギーを W_{Ii} ($= \bar{W}_{Di} + \bar{W}_{Hi}$) として $\bar{E}_i$ と区別し, 系の総入力エネルギー, 及び総履歴吸収エネルギーをそれぞれ $\bar{E}$, 及び $\bar{W}_H$ と表わす。なお, 正規化されていない実際の各エネルギーは, 前出の各々にそれぞれ $m_1 \ddot{x}_{y1}^2 / (p^2 \rho^2)$ を乗ずれば得られる。

4. 計算例

Fig. 3 は, せん断型 5 自由度系に周期 $T_s = 1.0 \text{ sec}$, 継続時間 $T_i = 20 \text{ sec}$ の正弦波を入力した場合を対象として, 総入力エネルギー $\bar{E}$ に対する各質点を介して入力される入力エネルギー $\bar{E}_i$ の比 ($\bar{E}_i / \bar{E}$), $\bar{E}$ に対する各層に分配される入力エネルギー W_{Ii} の比 ($W_{Ii} / \bar{E}$), $\bar{E}$ に対する各層の履歴吸収エネルギー W_{Hi} の比

(W_{Hi}/E), ならびに, 各層の W_{Li} に対する W_{Hi} の比(W_{Hi}/W_{Li})等の分布に及ぼす, 減衰定数 h ならびに

降伏強度比 a の影響を比較するために, 縦軸に各質点(層)の位置, また, 横軸に各比をとり, a を 2.5, 5.0, 10.0 と 3 通り, h を 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4 と 5 通りに変化させた場合についてプロットしたものである。他のパラメーターは,

$\alpha_i = \zeta_i = \xi_i = 1.0$, $\gamma_i = 0.1$ ($i = 1 \sim 5$), $p = 1.0$ である。図より, E_i/E 分布は, a があまり大きくない場合には h にほとんど影響されずほぼ直線的に変化し, 上方ほど入力エネルギーが大きく,

本例の場合 $E_5/E \div 0.27$, $E_1/E \div 0.09$ である。 a が大きい場合 ($a=10$) でも h が大きければ, 塑性化の程度があまり大きくならないため (Fig. 4 参照), 前述と同様の傾向を示しているが, h が小さく塑性化が極端に進むような場合には, 徐々に下方からの入力エネルギーが大きくなり, $h \leq 0.05$ では逆転している。 W_{Li}/E 分布は, a および h にほとんど影響を受けずにほぼ直線的に変化し, $W_{Li}/E \div 0.5$, $W_{L5}/E \div 0$ となっている。

W_{Hi}/E 分布は, a が大きくなるにつれてより直線的になっており, a および h が大きい程 W_{Hi}/E は小さくなる傾向にある。また, どの場合も $W_{H5}/E \div 0$ である。 W_{Hi}/W_{Li} 分布は, W_{Hi} が極端に小さな上層部を除くと同一の h に対してほぼ一定となっており, その値は a および h が大きい程小さくなっている。Fig. 5 (a), (b) は, Fig. 3, 4 と同様な場合の系の総入力エネルギー E に対する総履歴吸収エネルギー W_H の比 (W_H/E) に及ぼす h および a の影響を比較するために, それぞれ横軸に h あるいは a の対数をとってプロットしたものである。これらの図より, W_H/E は, a および h が大きい程小さくなり, またそれらの対数とほぼ線形関係にあることがわかる。

一般に, W_{Hi} は i 層の損傷に関する一指標であると考えられるが, これだけでは層の損傷の程度を正確に知ることはできない。損傷の程度は, 厳密には層の履歴吸収エネルギーとその許容吸収エネルギーとの対比により検討されるべきものであるが, 後者はその算定方法等が確立しておらず今後の研究が待たれる。

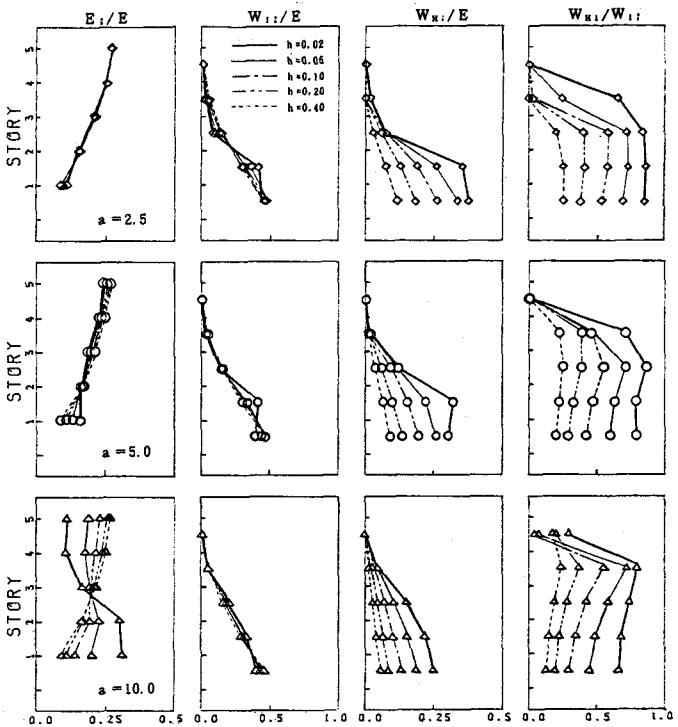


Fig. 3 エネルギー比分布

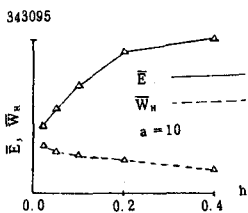


Fig. 4 $\bar{E}$, $\bar{W}_H$ に及ぼす h の影響

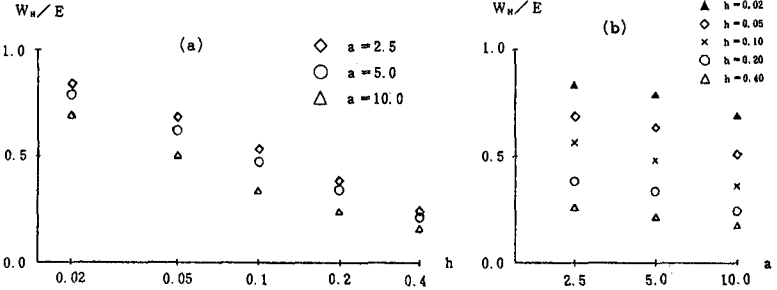


Fig. 5 W_H/E に及ぼす a , h の影響

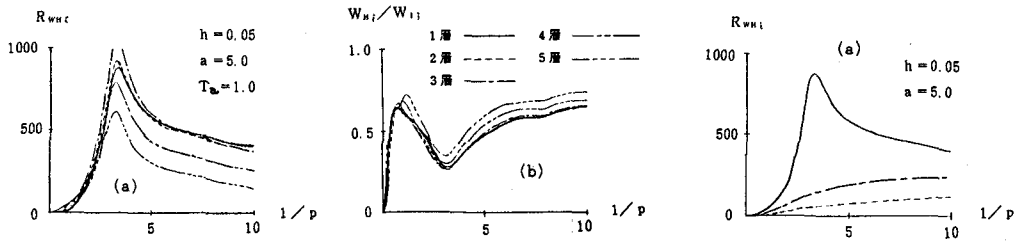


Fig. 6 R_{whi} , W_{hi}/W_{1i} に及ぼす p の影響
(SIN波, 全層)

そこで、各層の損傷の程度をより正確に把握するために、初期漸増過程における各層の最大弾性ひずみエネルギー $W_{eimax} = Q_{yi} \bar{x}_{yi}/2$ に対する履歴吸収エネルギー W_{hi} の比 $R_{whi} = W_{hi}/W_{eimax}$ を考えることにする。Fig. 6(a) は、同様に正弦波を入力した場合の円振動数比 p が R_{whi} に及ぼす影響を検討するために、縦軸に R_{whi} 、横軸に $1/p$ をとって各層ごとにプロットしたものである。ここで、他の各パラメーターは、 $\alpha_i = \xi_i = 1.0$, $\gamma_i = 0.1$ ($i = 1 \sim 5$)、 $\zeta_i = 1.0, 0.87, 0.73, 0.6, 0.4$, $h = 0.05$, $a = 5.0$, $T_s = 1.0$ である。同図より、この系は $1/p$ が、ほぼ 3.2 ($p \approx 0.31$) の場合に共振状態にあり、Fig. 3 と同様な比較によれば下層ほど W_{hi} が大きいにもかかわらず、 R_{whi} は $1/p$ のほぼ全域にわたり R_{whi} が最大となっているのがわかる。同図(b)は、同様な場合における W_{hi}/W_{1i} に及ぼす $1/p$ の影響を検討するために、縦軸に W_{hi}/W_{1i} を横軸に $1/p$ をとりプロットしたものである。これより、この場合には各層における差異はほとんどみられず、共振点付近で極小値となっているのがわかる。この場合も、前出の Fig. 3 と同様、 W_{hi}/W_{1i} は応答が大きい程小さくなる傾向があることを示している。Fig. 7 (a), (b) は、同様に、 R_{whi} 及び W_{hi}/W_{1i} に及ぼす p の影響を、それぞれ図中に示すような入力波に対して比較したものである。ただし、Ferndale地震、及び El-centro地震の卓越周期 T_s は、それぞれ 1.463sec , 0.661sec , また継続時間 T_s はともに 20sec であり、その他は、Fig. 6 の場合と同様である。同図(a)より、2つの実地震動の場合には R_{whi} にピークがなく単調増加する傾向にあり、また、sin波、El-centro波、Ferndale波の順に1層の損傷が大きいくことがわかる。また、同図(b)より、 W_{hi}/W_{1i} は、2つの実地震動では、ほとんど差がないが、それらとsin波を比較すると、共振点付近で大きく違っている。しかし、共振点付近から離れるにつれて、3者はほとんど一致する傾向がみられる。

5. あとがき

本研究では、まず、せん断型多自由度系の入力および履歴吸収エネルギーをより一般的に比較検討するために、運動方程式を正規化して系の応答を支配すると思われる構造特性パラメーターを設定した。そして、主に正弦波入力を対象として2・3のパラメーターの値を適当に変化させ、それらが各エネルギー比に及ぼす影響について若干の比較検討を行なった。その結果、前述のようなことが明らかとなったが、これらのことは、ごく限られた計算例から得られたものであり一般性という面では問題がある。従って、今後、種々の入力波を対象として広汎なパラメーター解析を行ない、構造特性パラメーターならびに入力地震動パラメーターが各エネルギー等に及ぼす影響について比較検討を行なう必要があるものと思われる。

参考文献

- 1) 大野, 西岡, 藤野: 構造物が地震時に受ける塑性ひずみエネルギー量の定量的評価, 土木学会論文報告集, 第333号, 1983年5月, PP. 91-99.
- 2) 平尾, 沢田, 成行, 笹田: 強震下における一自由度系の履歴吸収エネルギーと弾性応答値との関係について, 土木学会論文報告集, 第368号/I-5, 1986年4月, PP. 401-410.
- 3) 加藤, 秋山: 強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷, 日本建築学会論文報告集, 第235号, 1975年9月, PP. 9-18.
- 4) I. Ohno and T. Nishioka: Control of Input Energy for Elasto-Plastic Multi-Mass Systems subjected to Seismic Motion, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng. Vol. 2, No. 1, Apr., 1985, PP. 247-257.