(86) 1G場での地盤・構造物系の模型振動実験の相似則について

運輸省港湾技術研究所　正員　井合　進

1．はじめに

近年注目を集めている海洋構造物，あるいは，社会的に重要な役割を果している港湾構造物をはじめとして水ー地盤ー構造物からなる連成系の耐震性を明らかにするために1Gの重力場において模型振動実験を実施すること（すなわち，”普通”の模型振動実験を行うこと）は，数多い。しかし，このような連成系の模型振動実験に適用すべき相似則は，未だ明らかにされていないように思える。近年の研究では，香川［1］，国生［2］が土構造物についての相似則を示している。しかし，これらの成果を，水で飽和した地盤に加えて，杭や矢板などからなる構造物やこれらをとりまく水からなる連成系の模型振動実験に適用するにあたっては，さらに検討を要する点が数多く残されているように思われる。これらの諸点を明らかにするため，理論的考察を行う機会を得たので，これを以下に示すこととする。なお，相似則の立て方には，いくつかの方法があるが［1］，以下に示す検討においては，現象を支配する方程式に基づく方法を用いた。

2．基本方程式

相似則を導くために基本とする方程式を大別すれば，水で飽和した地盤，杭や矢板などの構造物，および，水，のそれぞれに対する方程式がある。

（1）飽和した地盤の方程式

多くの場合，土粒子自身の圧縮性，および間隙水の土粒子骨格に対する相対加速度を無視することができるので，飽和した地盤は，以下に示す様な，土粒子骨格および間隙水を合わせた複合体に対する運動方程式と間隙水のみの運動に関する方程式との連立方程式により表わされる。［3］

$$\mathbb{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{1}$$

$$\nabla^T \mathbb{K} \nabla p - \nabla^T \mathbb{K} \rho_f \mathbf{g} + \nabla^T \rho_f \mathbb{K} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{m}^T \mathbb{L} \dot{\mathbf{u}} - \dot{p} s / K_f = 0 \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31})$：全応力ベクトル

$$\mathbb{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

ρ：土粒子と間隙水との複合体としての密度

$\mathbf{g}^T = (0, g, 0)$：重力加速度ベクトル　（$g = 980$ Gal）

$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, u_3)$：土粒子の変位ベクトル

$\nabla^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

$\mathbb{K}$：透水係数マトリックス

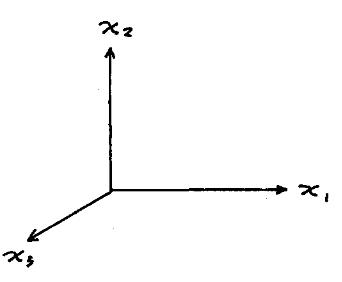
p：間隙水圧

ρ_f：間隙水の密度

$\mathbf{m}^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$

s：間隙率

K_f：間隙水の体積弾性係数



さらに，ひずみ一変位関係，有効応力の定義，および，有効応力一ひずみ関係のそれぞれが，以下の様に，表わされる。

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{L}\, d\mathbf{u} \tag{3}$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m}\, dp \tag{4}$$

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbb{D}\, d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5}$$

ここに，$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$ ：ひずみベクトル

$\boldsymbol{\sigma}'^T = (\sigma_{11}', \sigma_{22}', \sigma_{33}', \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31})$：有効応力ベクトル

$\mathbb{D}$：剛性マトリックス（応力やひずみの履歴に依存するものとする。）

境界条件は，変位，応力，間隙水圧，流量，のそれぞれに対して，以下のとおりとなる。

$$\mathbb{S}\boldsymbol{\sigma} = \bar{T} \qquad \text{on } \Gamma_T \tag{6}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{on } \Gamma_u \tag{7}$$

$$p = \bar{p} \qquad \text{on } \Gamma_p \tag{8}$$

$$\mathbf{n}^T \mathbb{K}(\nabla p - \rho_f \mathbf{g} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) = \bar{q} \qquad \text{on } \Gamma_q \tag{9}$$

ここに，$\bar{\mathbf{T}}$，$\bar{\mathbf{u}}$，$\bar{p}$，$\bar{q}$ は，それぞれの境界上で規定される変位，表面力，間隙水圧，間隙水の流量，$\mathbb{S}$，$\mathbf{n}$ は，それぞれの境界での垂直方向余弦からなるマトリックス，および，垂直単位ベクトルである。

（2）杭や矢板などの構造物の方程式

矢板の方程式は，次式で表わされる。

$$EI\frac{\partial^4 \mathbf{n}^T \mathbf{u}}{\partial n^4} + \rho_b \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{n}^T \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{10}$$

ここに，EI ：矢板の曲げ剛性

$\mathbf{n}$ ：矢板を凹凸の無い板と見做したときの矢板に対する垂直方向の単位ベクトル

$\mathbb{S}$ ：上記の意味での矢板に対する垂直方向余弦からなるマトリックス

ρ_b ：矢板の単位奥行かつ単位長さ当たりの密度

$\boldsymbol{\sigma}$ ：矢板に接する地盤の全応力ベクトル

杭については，杭幅の影響を考慮して方程式（１０）の第３項の係数を適当な方法により定めることにより，近似できる。

（3）水の方程式

多くの場合，水の粘性および地盤・構造物の運動により発生する波の影響は無視できるので，水の方程式は，以下のとおりとなる［4］。

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2}\ddot{p} = 0 \tag{11}$$

ここに，C：水中の音速

p：水圧

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

また，地盤，もしくは，構造物と水との境界においては，水の収支バランスのため，次式（連続の式）が成立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{u}} \tag{12}$$

ここに，$\mathbf{n}$ ：地盤，もしくは，構造物と水との境界に垂直な単位ベクトル

３．相似則

模型の幾何的縮尺を λ，時間の縮尺を λ_t とする。すなわち，

$$(\mathbf{x})_p = \lambda(\mathbf{x})_m \quad , \quad (t)_p = \lambda_t (t)_m \tag{13}$$

ここに，$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$

添字m，pは，それぞれ，模型，原型を表わす。

このことから，基本方程式（１）－（１２）に表われる微分演算子については，模型mと原型ｐとの間に，つぎの関係が成立つ。

$$(\mathbb{L})_p = \frac{1}{\lambda}(\mathbb{L})_m \,,\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_p = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_m \,,\ (\nabla)_p = \frac{1}{\lambda}(\nabla)_m \,,\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p = \frac{1}{\lambda_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m \,,\ \text{etc.} \tag{14}$$

同様に，基本方程式（１）－（１２）に現れる変数と係数等について，模型mと原型ｐとの間に次の様な関係が成立つとする。

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathbb{E})_p = \lambda_\varepsilon(\mathbb{E})_m ,\ (\mathbb{U})_p = \lambda_u(\mathbb{U})_m ,\ (\boldsymbol{\sigma})_p = \lambda_\sigma(\boldsymbol{\sigma})_m ,\ (\boldsymbol{\sigma}')_p = \lambda_{\sigma'}(\boldsymbol{\sigma}')_m ,\ (p)_p = \lambda_p(p)_m ,\\
&(\mathbb{D})_p = \lambda_D(\mathbb{D})_m ,\ (\mathbb{K})_p = \lambda_K(\mathbb{K})_m ,\ (S/K_f)_p = \lambda_{S/K_f}(S/K_f)_m ,\ (EI)_p = \lambda_{EI}(EI)_m ,\\
&(\rho)_p = \lambda_\rho(\rho)_m ,\ (\rho_f)_p = \lambda_{\rho_f}(\rho_f)_m ,\ (\rho_b)_p = \lambda_{\rho_b}(\rho_b)_m ,\ \left(\frac{1}{c^2}\right)_p = \lambda_{\frac{1}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\right)_m ,\\
&(\bar{\mathbb{T}})_p = \lambda_{\bar{T}}(\bar{\mathbb{T}})_m ,\ (\bar{\mathbb{U}})_p = \lambda_{\bar{u}}(\bar{\mathbb{U}})_m ,\ (\bar{P})_p = \lambda_{\bar{p}}(\bar{P})_m ,\ (\bar{g})_p = \lambda_{\bar{g}}(\bar{g})_m
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

相似則は，基本方程式（１）－（１２）が，模型と原型の両者について成立つための条件として求められる。例えば，式（１）が原型に対して成立つとし，模型と原型との関係式（１３）－（１５）を代入すれば，

$$\frac{1}{\lambda}(\mathbb{L})_m \lambda_\sigma(\boldsymbol{\sigma})_m + \lambda_\rho(\rho)_m \mathbf{g} = \lambda_\rho(\rho)_m \frac{\lambda_u}{\lambda_t^2}(\ddot{\mathbb{U}})_m \tag{1'}$$

式（１）が模型に対しても成立つためには，式（１）と式（１′）を比べることにより，次式が成立たねばならない。

$$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda} = \lambda_\rho = \lambda_\rho \frac{\lambda_u}{\lambda_t^2} \tag{16}$$

式（２）－（１２）について，同様にして，以下の条件が導かれる。

$$\lambda_K \lambda_p / \lambda^2 = \lambda_K \lambda_{\rho_f} / \lambda = \lambda_{\rho_f} \lambda_K \lambda_u / (\lambda \lambda_t^2) = \lambda_u / (\lambda \lambda_t) = \lambda_{S/K_f} \lambda_p / \lambda_t \tag{17}$$

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_u / \lambda \tag{18}$$

$$\lambda_\sigma = \lambda_{\sigma'} = \lambda_p \tag{19}$$

$$\lambda_{\sigma'} = \lambda_D \lambda_\varepsilon \tag{20}$$

$$\lambda_\sigma = \lambda_{\bar{T}} \tag{21}$$

$$\lambda_u = \lambda_{\bar{u}} \tag{22}$$

$$\lambda_p = \lambda_{\bar{p}} \tag{23}$$

$$\lambda_K \lambda_p / \lambda = \lambda_{\bar{g}} \tag{24}$$

$$\lambda_{EI} \lambda_u / \lambda^4 = \lambda_{\rho_b} \lambda_u / \lambda_t^2 = \lambda_\sigma \tag{25}$$

$$\lambda_p / \lambda^2 = \lambda_{\frac{1}{c^2}} \lambda_p / \lambda_t^2 \tag{26}$$

$$\lambda_p / \lambda = \lambda_{\rho_f} \lambda_u / \lambda_t^2 \tag{27}$$

式（１６）－（２７）を，幾何的縮尺 λ，ひずみの縮尺 λ_ε，密度の縮尺 λ_ρ について解けば，相似則が以

下の様に求まる。

λ_t	λ_u	λ_σ	$\lambda_{\sigma'}$	λ_p	λ_D	λ_k	λ_{s/K_f}	λ_{EI}	λ_{ρ_f}	λ_{ρ_b}	$\lambda_{\frac{1}{c^2}}$
$(\lambda\lambda_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$	$\lambda\lambda_\varepsilon$	$\lambda\lambda_\rho$	$\lambda\lambda_\rho$	$\lambda\lambda_\rho$	$\lambda\lambda_\rho/\lambda_\varepsilon$	$(\lambda\lambda_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}/\lambda_\rho$	$\lambda_\varepsilon/(\lambda\lambda_\rho)$	$\lambda^4\lambda_\rho/\lambda_\varepsilon$	λ_ρ	$\lambda\lambda_\rho$	$\lambda_\varepsilon/\lambda$

$\lambda_{\bar{\tau}}$	$\lambda_{\bar{u}}$	$\lambda_{\bar{p}}$	$\lambda_{\bar{q}}$
$\lambda\lambda_\rho$	$\lambda\lambda_\varepsilon$	$\lambda\lambda_\rho$	$(\lambda\lambda_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$

なお，求めた相似則の特別な場合として，$\lambda_\rho=1$ かつ $\lambda_\varepsilon=\lambda^{\frac{1}{2}}$であれば，相似則は，以下の様になる。

λ_t	λ_u	λ_σ	$\lambda_{\sigma'}$	λ_p	λ_D	λ_k	λ_{s/K_f}	λ_{EI}	λ_{ρ_f}	λ_{ρ_b}	$\lambda_{\frac{1}{c^2}}$	$\lambda_{\bar{\tau}}$	$\lambda_{\bar{u}}$	$\lambda_{\bar{p}}$	$\lambda_{\bar{q}}$
$\lambda^{\frac{3}{4}}$	$\lambda^{\frac{3}{2}}$	λ	λ	λ	$\lambda^{\frac{1}{2}}$	$\lambda^{\frac{3}{4}}$	$\lambda^{-\frac{1}{2}}$	$\lambda^{\frac{7}{2}}$	1	λ	$\lambda^{-\frac{1}{2}}$	λ	$\lambda^{\frac{3}{2}}$	λ	$\lambda^{\frac{3}{4}}$

したがって，この場合，地盤の土粒子骨格に対する相似則は，香川［1］，国生［2］の示した結果に一致する。

4．相似則の適用性に関する考察

上に示した相似則を導くに当たっては，式（15）に示した関係が成立つことを前提としている。これらの関係の大部分は明らかに成立つが，ひずみベクトルに関する関係$(\boldsymbol{\varepsilon})_p=\lambda_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon})_M$ もしくは，剛性マトリックスに関する関係$(\boldsymbol{D})_p=\lambda_D(\boldsymbol{D})_m$が直ちに成立つか否かについては，現在のところ諸説有るようである。Vermeerはせん断ひずみ，体積ひずみ（ダイレイタンシーを含む）の両者に対して同一の拘束圧依存性があるとしており［5］，この説によれば，ひずみベクトルに関する関係$(\boldsymbol{\varepsilon})_p=\lambda_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon})_m$等が成立つこととなる。この場合液状化現象についても，当然上に示した相似則が成立つこととなる。

さて，上に示した相似則に従う材料を得る上においてやや実現困難な条件は，水の体積圧縮性に関するλ_{s/K_f}および$\lambda_{\frac{1}{c^2}}$の条件であろう。しかし，水ー地盤ー構造物の連成系の地震時挙動の場合は，水の体積圧縮性が連成系の挙動に支配的な影響を及ぼすことは少ないと思われるので，水の体積圧縮性に関する条件が厳密に満たされなくても連成系の相似性は近似的に満足されるものと思われる。

5．おわりに

水ー地盤ー構造物の連成系の1Gの重力場における振動実験に適用すべき相似則について理論的考察を行った。この結果，本稿に示す相似則が得られた。1Gの重力場における振動実験を実施する場合は今後も多いと思われるが，それらの実験の実施に当たって本稿が参考となれば幸いである。なお，最近，遠心力場における振動実験の実施が可能になっており，今後，遠心力場における振動実験により1Gの重力場における振動実験の相似性に関して，新たな知見が得られることを期待したい。

6．参考文献

［1］香川崇章：土構造物の模型振動実験における相似則，土木学会論文報告集，第275号，1978年7月，pp．69－77。［2］国生剛治：低拘束圧下の砂の動的物性と模型振動実験に適用される相似則，第15回地震工学研究発表会講演概要，1979年7月，pp．265－268。［3］Zienkiewicz,O.C.,Chang,C.T.,and Bettess,P.:Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. Limits of validity,Geotechnique,Vol.30,No.4,1980,pp.385-395。［4］Lamb.H.:Hydrodynamics, 6th ed.,Cambridge,1932。［5］Vermeer,P.,A.:Formulation and prediction of sand behaviour,Proc. the 10th International conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering,Vol.I,Stockholm, 1981,pp.259-262