

(38) 応答波形を用いた構造物動特性の同定と入力波形の推定

京都大学防災研究所 正員 清野純史

京都大学防災研究所 正員 土岐憲三

京都大学防災研究所 正員 佐藤忠信

1. まえがき あるシステムの入力変数と出力変数は、システム固有の入出力関係で特徴づけることができる。例えば構造系に入力した地震動と、その出力として得られた構造物の応答との関係である。構造物の動特性を同定する場合、通常入出力データが与えられていることが前提である。入力推定もシステム同定と同様逆問題の一つとして捉えることができ、これは適切なモデル化の下で出力と構造物の動特性が既知である場合に可能となる。したがって、一般には入力、システム、出力のうち2つが既知でなければ他の1つは得ることができない。しかし、出力のみからシステムの動特性が定められれば、これと出力を用いて入力をも推定できるはずである。

本研究では、カルマンフィルターを用いて構造物からの出力として得られる応答波形のみから構造物の動特性と入力波形の双方を推定する解析法を提案する。まず、カルマンフィルターを用いて出力波形のみから構造物の動特性を同定する。次に、同定された動特性と出力波形から構造物の入力波形を推定する。

構造物の動特性を同定する試みとして、土岐・佐藤ら¹⁾はホワイトノイズが線形構造系に入力する場合を仮定することにより、AR-MA過程を用いて出力波形のみから構造物の動特性を同定した。星谷・斉藤^{2) 3)}はカルマンフィルター理論に基づき、入出力波形を用い状態変数に組み込んだ構造パラメータを同定した。本研究における構造動特性の同定法は、星谷・斉藤の手法を準用しているが、出力波形のみから系の動特性の同定を行う点が異なる。

振動・地震工学における入力の逆推定を目的とした研究はあまり多くない⁴⁾。これまでの研究は構造系あるいは地盤系の応答の把握が主たる目的であり、入力は通常既知として取り扱ってきた。しかし有効入力の考え方からしても、構造物に実際に入力する地震動をその構造系の応答から直接逆推定することは地盤・構造系の動的相互作用を考える上で重要な問題である。ここでは、系の動特性と出力波形から入力波形を導く手法としてOTTら⁵⁾が地盤探査に用いたdeconvolution法を応用し、これを多自由度系に拡張してアルゴリズムの中で得られる予測誤差から入力波形を推定した。

2. 入力波形を用いない構造動特性の同定 次式のような信号過程と観測過程を考える。

$$X_t = \Phi_{t/t-1} X_{t-1} + G W_{t-1} \quad (1)$$

$$Y_t = H X_t + V_t \quad (2)$$

表-1 カルマンフィルターアルゴリズム

カルマンフィルターアルゴリズム

- ①初期値の推定
 $\hat{x}(k|k), P(k|k)$
- ②状態ベクトルの推定値の計算
 $\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1|k) \hat{x}(k|k)$
- ③推定誤差共分散マトリクスPの計算
 $P(k+1|k) = \Phi(k+1|k) P(k|k) \Phi^T(k+1|k) + \Gamma(k) Q(k) \Gamma^T(k)$
- ④カルマンゲインマトリクスKの計算
 $K(k+1) = P(k+1|k) M^T(k+1) [M(k+1) P(k+1|k) M^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}$
- ⑤観測値 y_{k+1} の取り入れ
 $\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) [y_{k+1} - M(k+1) \hat{x}(k+1|k)]$
- ⑥新たな誤差共分散マトリクスKの計算
 $P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) M(k+1)] P(k+1|k) [I - K(k+1) M(k+1)]^T + K(k+1) R(k+1) K^T(k+1)$
- ⑦ $k \leftarrow k+1$ としてステップ②に戻る。

ここに、 x , y はそれぞれ状態ベクトル、観測ベクトル、 Φ , G , H はそれぞれ状態遷移マトリクス、システムノイズ係数マトリクス、観測マトリクスである。また、 w , v はガウス白色雑音であり、 E を期待値、 δ をクロネッカのデルタとすると、 $E\{w_s w_t^T\} = Q \delta_{st}$, $E\{v_s v_t^T\} = R \delta_{st}$ である。

適切なモデル化のもとで支配方程式を上述の形に移行できれば表-1のカルマンフィルターアルゴリズムにしたがって状態変数を逐次求めることにより目的に応じた予測、濾波、平滑が可能となる。

いま、図-1に示される3層の建物を考える。この建物を3質点3自由度の系として表し、各質点での応答波形（本研究では変位または速度）だけが既知であるとする。対象とする構造物をバネ、ダッシュポット、質点の離散モデルで置き換えるとこのモデルの運動は以下に示すような微分方程式で表すことができる。

$$[M]\{\ddot{X}_1\} + [C]\{\dot{X}_1\} + [K]\{X_1\} = -[M]\{\ddot{u}\} \quad (3)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリクスであり、 $\{X\}$ は構造物の応答、 $\{\ddot{u}\}$ は地動加速度（入力加速度）を表す。ここで、式(1),(2)に対応する状態変数を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{\{X_1\} \{X_2\} \{X_3\} \{X_4\}\}^T \\ &= \{\{X_1\} \{X_1\} \{K/m\} \{C/m\}\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、状態変数の数は縮小している²⁾。

$$\{X_1\} = \{\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3\}^T \quad (5)$$

$$\{X_2\} = \{\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{x}_3\}^T \quad (6)$$

$$\{X_3\} = \{K_1/m_1 \quad K_1/m_2 \quad K_1/m_3 \quad K_2/m_2 \quad K_3/m_3\}^T \quad (7)$$

$$\{X_4\} = \{C_1/m_1 \quad C_2/m_2 \quad C_3/m_3\}^T \quad (8)$$

したがって、状態変数の1階微分は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\ddot{x}}_1 \\ \dot{\ddot{x}}_2 \\ \dot{\ddot{x}}_3 \\ \dot{\ddot{x}}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ -[M]^{-1}[C]\{X_2\} - [M]^{-1}[K]\{X_1\} - [M]^{-1}\{\ddot{u}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

地震時における構造物の応答を考えると、入射波による地震外力が終了した後も建物はまだ振動を続ける。すなわち、建物の自由振動が励起されている。この自由振動部分のみを考えればその時点での入力ゼロと考えることができる。したがって、状態変数に組み込むべき入力の項を省くことにより構造物の動特性の同定が可能となる。

観測波形としては変位または速度を考え、それに応じて観測マトリクスの成分を変化させる。ここでは観測波形を変位とした。

カルマンフィルタアルゴリズムにしたがって状態変数に組み込んだ未知数を逐次解くにあたり、初期条件の与え方によっては不安定な同定結果を招く恐れがあるので、星谷・斉藤の提案した重み付きグローバルな繰り返し法³⁾を取り入れた。これは、推定誤差の共分散に重みを掛けて真値への漸近を早めると共に、グローバルな繰り返しによって初期値を更新するものである。本研究では、重みを20としてグローバルな繰り返しを4～6回行った。観測誤差の共分散Rは、 $10^{-6} \sim 10^{-2}$ の間で適宜選択した。

さて、(9)式の状態変数を用いて定式化を行い表-1のアルゴリズムを解けばよいが、入力がゼロとなる時刻を応答波形から正確に捉えることは困難である。そこで本研究では観測された応答波形の時刻歴を終わってから逆にたどってフィルタリングすることによりこの問題点を克服した。まず、表-2に示された諸元を持つ構造系に図-2の波形を入力し、得られた変位波形を観測

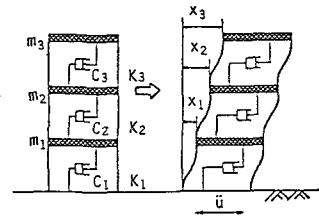


図-1 3質点3自由度モデル

表-2 3質点系モデルの諸元

	mass 1	mass 2	mass 3
mass: m_i (t·sec ² /m)	10	10	10
damping coeff.: s_i (t·sec/m)	40	40	30
spring const.: d_i (t/m)	3000	2000	1000

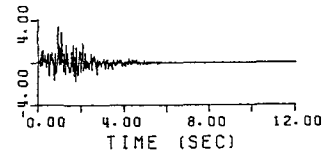


図-2 入力加速度波形

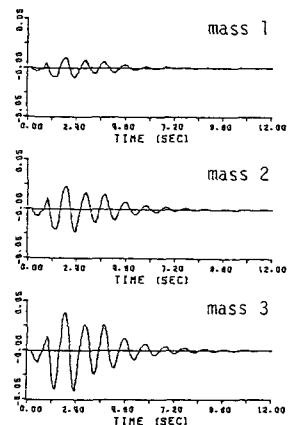


図-3 変位応答波形

量として同定を行った。入力波形はホワイトノイズに包絡線関数を乗じてシミュレートした振幅変調型の波形である(図-2)。これを構造物に入力することにより得られた応答波形を示したものが図-3である。

図-4(a),(b)はフィルタリング開始時刻 t_s と、そこから時刻を遡ってある時刻 t_a までフィルタリングすることにより得られた同定結果を時刻 t_a のところにプロットしたものである。(a)は剛性に関する項 $\{K/m\}$ の同定結果であり(b)は減衰に関する項 $\{C/m\}$ の同定結果である。図中の t_a 軸に平行な直線は真値を表している。この場合には12~6秒というように、フィルタリング開始時刻 t_s をある程度任意に定めても同定結果は余り影響を受けない。すなわち、応答の振幅がある程度ゼロに近づいたところを t_s と定め、そこから原点に向かって逆にフィルタリングを行えば同定が可能であり、そのフィルタリング時間は数秒で十分であることがわかる。図-4(a),(b)の一番下の図は入力時刻歴を12秒から原点に向かって逆にプロットしたものである。同図中の上の3つの同定結果の図と比較すれば明らかなように、入力波形の振幅が顕著である時刻6~4秒の所ではやはり入力の影響が生じ、同定が不安定となって真値からの偏差が大きくなることがわかる。

カルマンフィルタはノイズに対する先見情報が不可欠であるから、ノイズの共分散に対してある程度の目安を立てておく必要がある。図-5は初期値を真値に一致させて観測誤差の共分散を変化させて同定の精度を検討したものである。12秒を始点として時刻を逆に同定を行うわけであるが、入力の影響が無視できるうちはRも小さくてよい。しかし、フィルタリングが進むにつれて徐々に初期値から外れてくる。このときRの値を少し大きくすると再び初期値に一致する。これは、入力の振幅が相対的に小さく、その影響が無視できる場合はRのレベルも小さくて済むが、10~8秒以下になり入力の影響が無視できない程度になると、これを自由振動と見なすためにRのレベルを大きくして誤差として除去する必要があるからである。

3. 構造物動特性の同定結果に基づく入力波形の推定 出力波形(応答波形)のみから構造物の動特性が求まれば、今度はこの両者を用いて入力波形を求めることが可能となる。ここでは、OTF⁵⁾らの1入力1出力に対するError Filterを多自由度系に拡張し⁶⁾、図-1の各質点で得られた応答波形から入力波形を推定する。

いま、次式で表される連続型システムを考える。

$$\dot{X}(t) = A X(t) + u(t) \quad (10)$$

$$y(t) = H X(t) + v(t) \quad (11)$$

式(10)の両辺に e^{-At} を乗じて整理したものが

$$X_t = \Phi_{t/t-1} X_{t-1} + h_{t-1} \quad (12)$$

であるから式(12)の h_{t-1} は以下になる。

$$h_{t-1} = \int_{t-1}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (13)$$

一方、式(12)より次式が得られる。

$$h_{t-1} = X_t - \Phi_{t/t-1} X_{t-1} \quad (14)$$

ここで、真値 x_t は実際は未知であることを考慮して、表-1のカルマンフィルタアルゴリズムを基に $x_t \rightarrow x(t|t)$ 、 $\phi_{t/t-1} X_{t-1} \rightarrow x(t|t-1)$ と置き換えると次式を得る。

$$h_{t-1} = X(t|t) - X(t|t-1) \quad (15)$$

式(13)の数値積分を行い、式(15)と等置することにより $u(t)$ を求めることができる。

図-1のモデルの運動方程式は式(3)のようになるの

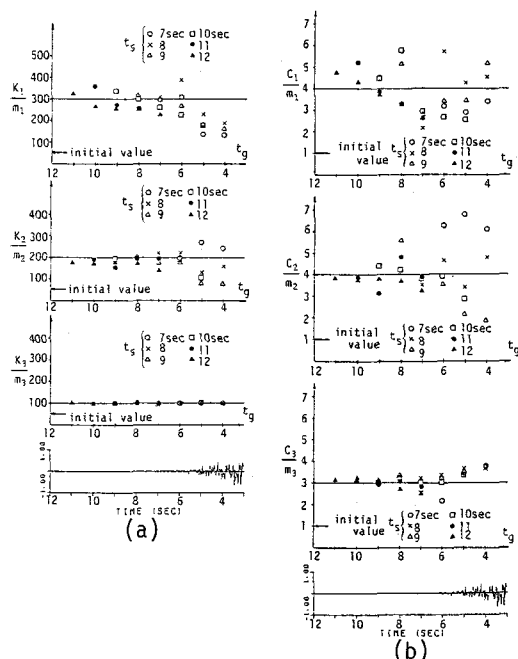


図-4 フィルタリング開始時刻およびフィルタリング区間と同定結果の関係
(a) 剛性項 (b) 減衰項

で式(9)の上2行を変形して用いると状態方程式は次式のように書き表せる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ -\{\ddot{u}\} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

前節では入力項 $-\{\ddot{u}\}$ を同定すべき未知数と共に状態遷移マトリクスの中に組み込んだのに対し、ここでは制御入力として別の項に分けたものである。したがって、図-1のような構造物のモデル化を行って、表-1のカルマンフィルターアルゴリズムにしたがって計算を行えば、式(13)、(15)から入力 $\{\ddot{u}\}$ が求まる。

表-3は入力を推定するために用いた構造物の動特性である。CASE1は真値を与えたもの、CASE2、CASE3は前節2. で述べた方法によって図-3に示す応答波形のみから同定された動特性であり、それぞれ図-3の12sec→10sec, 10sec→8secまでの波形をもとに同定したものである。この諸元を用いて逆推定された波形を示したものが図-6である。これらの図を相互に比較しても、ピークの位置や波形、継続時間はほとんど同一であり有意な差は現れていない。これは、同定された動特性(表-3)の誤差が10%程度であっても、入力の推定結果に余り影響を及ぼさないことを意味している。

4. 結論 以下に本研究で得られた成果及び結論を述べる。

(1)構造物の地震応答波形のコーダ部分を取り出し、時間軸を逆にフィルタリングすることにより、入力波形を必要とせずに構造物の動特性を同定できた。同定された結果は自由振動と見なせるこのコーダ部分の選び方にあまり影響されないことも判明した。

(2)OTTらの1入力1出力に対する Error Filter を多自由度系に拡張し、構造物の応答波形のみから同定した動特性を用いて入力波形を推定してその有効性を検証した。本手法では、同定された動特性の結果が真値から10%程度の誤差が含まれていても入力の推定には余り影響しないことがわかった。

(3)フィルタリングは、入力がゼロとなった後の自由振動に対する波形を対象として行われるが、入力振幅が相対的に小さいうちは観測誤差の共分散Rを大きく設定することによってその影響を除去することができる。

参考文献 1)土岐・佐藤・生木:自己回帰・移動平均法による構造物の動的パラメータの推定,京大防災研年報,第21号B-2,pp.57-68,1978. 2)星谷・斉藤:拡張カルマンフィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用,土木学会論文報告集,第339号,pp.59-67,1983. 3)星谷・斉藤:線形多自由度系の動特性の推定,土木学会論文報告集,第344号/I-1,pp.289-298,1984. 4)土岐・佐藤・清野・市原:カルマンフィルターを用いた断層破壊過程の同定,京大防災研年報,第29号B-2,pp.1-16,1986. 5)Ott, N. and Meder, H.G.: The Kalman filter as a Prediction Error Filter, Geophys. Prosp. 20, pp.549-560, 1970. 6)土岐・佐藤・清野:カルマンフィルターによる多点異入力系の入力地震動の同定,第41回年次学術講演会講演概要集,pp.801-802,昭和61年。

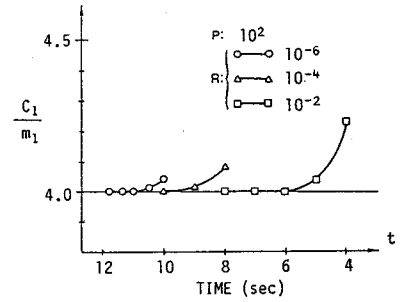


図-5 観測誤差共分散Rの変化による同定結果の推移

表-3 入力推定のための構造動特性

	$\frac{K_1}{m_1}$	$\frac{K_1}{m_2}$	$\frac{K_1}{m_3}$	$\frac{K_2}{m_2}$	$\frac{K_2}{m_3}$	$\frac{C_1}{m_1}$	$\frac{C_2}{m_2}$	$\frac{C_3}{m_3}$
CASE 1 (exact value)	300.	300.	300.	200.	100.	4.00	4.00	3.00
CASE 2 (12sec→8sec)	257.	287.	339.	174.	99.	3.75	3.78	3.11
CASE 3 (10sec→8sec)	306.	284.	298.	191.	98.	5.82	4.18	3.40

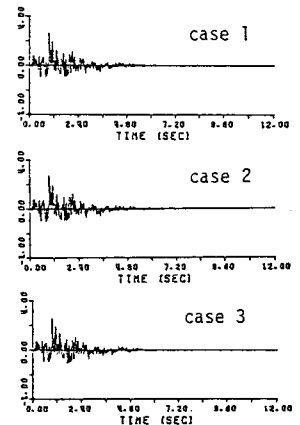


図-6 推定された入力波形