

(121) 水平上下同時入力に対する非線形スロッシング挙動と長周期応答スペクトルについて

前田建設工業㈱ 嶋田三朗 同 吉田隆治
 京都大学工学部 山田善一 同 家村浩和
 京都大学工学部 野田 茂

1 まえがき

著者らは、日本海中部地震時に生じた各地の大型石油タンクのスロッシング観測波高(図1)を利用して、ポテンシャル理論に基づく線形流体力学解析により、タンクに作用した長周期入力地動の応答スペクトルを逆算し、各地で得られた各種の強震計記録から求めた応答スペクトルと比較を行ってきた¹⁾。その結果は図2に示すように新潟、秋田等の大きなスロッシングを示した地点では、スロッシング高さから逆算したスペクトルの方が強震計記録によるスペクトルよりかなり大きな値となった。この原因としては、タンクと地震計の設置位置の相違や強震計記録に含まれる各種の誤差等も考えられるが、スロッシング波高に及ぼす境界条件の非線形性や上下動入力の影響も原因しているものと思われた。本報告は、まず、水平上下同時入力に対して境界条件の非線形性を考慮した振動方程式を導き、正弦波入力に対する過渡応答特性を用いて、非線形挙動の基本的特徴について論ずる。次に、強震計記録によるランダム波入力に対する非線形解析を行い、線形解との比較を行うことにより線形解を用いて逆算した地動の応答スペクトルを補正し、強震計記録から求めた応答スペクトルと比較を行う。

2. 基礎方程式

本研究においては、剛体円筒タンクの非線形液面揺動について、坂田・木村・内海による方法²⁾を基に、それに新たに上下動入力の項を導入した。その仮定と結果の概要を以下に示す。

内液のタンクに対する相対運動の速度ポテンシャル Φ を用いるとラプラスの方程式は、図3の座標系を用いて

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

壁面における境界条件は

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a_0} = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

液面における非線形境界条件は

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + \{g + \ddot{f}_z(t)\} \eta + r \cos \theta \ddot{f}_x(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \Big|_{z=\eta} - \frac{1}{2} \{ \dot{f}_z^2(t) + \dot{f}_x^2(t) \} \} \delta \eta r dr d\theta = 0 \quad \dots\dots (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} \left\{ -\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right\} \delta \Phi \Big|_{z=\eta} r dr d\theta = 0 \quad \dots\dots (5)$$

となる。ガレルキン法による近似解法においては Φ と η の許容関数として、線形自由振動のモードのうち、

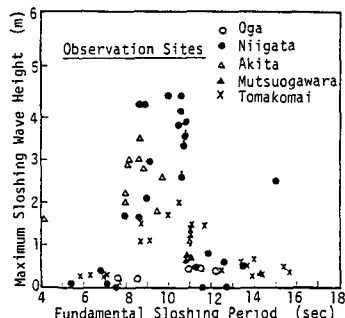


図1 スロッシング周期と観測波高

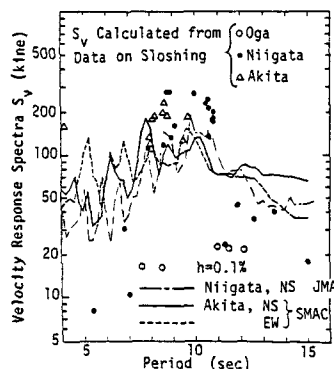


図2 スロッシング高さから求めたS_vの比較

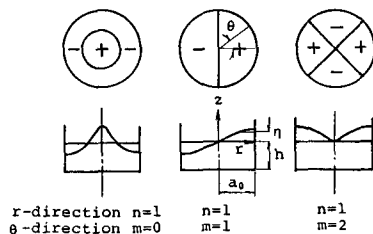


図3 座標系と振動モード

半径方向次数は、1次のみ、周方向次数は0～2次までを考慮する。採用した3つのモードを図3に示すが、以下、i 次モードと表現する時は周方向次数 i を表わすものとする（従って1次モードが線形解における基本モードに対応する）。各次の固有振動数は

$$\omega_m^2 = g \lambda_m \tanh(\lambda_m h) \quad (m=0, 1, 2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる（ $\lambda_0 = 3.8317$ ， $\lambda_1 = 1.8412$ ， $\lambda_2 = 3.0542$ ）。

次にタンクの半径 a_0 と固有振動数 ω_1 を用いた無次元量により、(1)～(5) 式を表現し、ガレルキン法を用いて一般化座標 C_0, C_1, C_2 に関する常微分方程式を導く²⁾と

$$\ddot{C}_1 + 2\zeta_1 \dot{C}_1 + (1 + \ddot{f}_z(t)/g) C_1 + C_1^3 P^{(1)} + C_1 \dot{C}_1^2 P^{(2)} + C_1 C_0 Q^{(1)} + \dot{C}_1 \dot{C}_0 Q^{(2)} + C_1 C_2 Q^{(2)} + \dot{C}_1 \dot{C}_2 Q^{(2)} = -\psi_1 S_1 \ddot{f}_x(t) \quad \dots\dots (7)$$

$$\ddot{C}_0 + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{C}_0 + \omega_0^2 (1 + \ddot{f}_z(t)/g) C_0 = C_1^2 R_0^{(1)} + \dot{C}_1^2 R_0^{(2)} \quad \dots\dots (8)$$

$$\ddot{C}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{C}_2 + \omega_2^2 (1 + \ddot{f}_z(t)/g) C_2 = C_1^2 R_2^{(1)} + \dot{C}_1^2 R_2^{(2)} \quad \dots\dots (9)$$

が得られる。ここに ζ_i は等価減衰定数、 S_1 は定積分値、 $\psi_1, P^{(1)}, P^{(2)}, Q^{(1)}, Q^{(2)}, R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ ($m=0, 2$) は、無次元深さ $\bar{h}$ に依存する非線形パラメータである²⁾。(7)～(9) 式には上下動 $\ddot{f}_z$ の影響が Mathieu の方程式の形で導入されている。また、(7)～(9) 式では水平動入力に1次モードにのみ直接作用し、0次及び2次モードに対しては1次モードの振動 C_1^2 及び $\dot{C}_1^2$ が外力として作用していることが分る。(7) 式の左辺第4項以降が各モードの連成を表わしている。スロッシングの主振動が1次モードであり、 C_0, C_2 への入力が C_1^2 及び $\dot{C}_1^2$ に関係することから、 C_0, C_2 は $2\omega_1$ の外力を受ける振動と考えられる ($\sin^2 \omega_1 t = (1 - \cos 2\omega_1 t)/2$)。従って、 ω_1/ω_0 及び ω_1/ω_2 が 0.5 に近づくとき各々0次モード及び2次モードが共振し、非線形性の影響が大きく現われる。図4は無次元液深 $\bar{h}$ (液深/タンク半径→形状係数) に対して ω_1/ω_0 及び ω_1/ω_2 を示したものである。上述のことを考慮すると浅いタンク ($\bar{h}$ が小) ほど非線形性の影響が現われ易くなるものと考えられる。

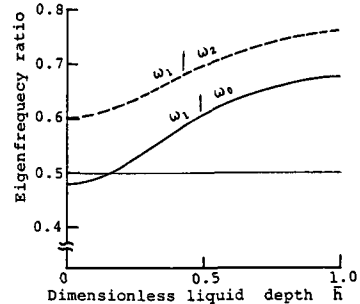


図4 無次元液深と固有振動数の関係

3. 正弦波入力による過渡応答

大きなスロッシング現象は、地震地動の内、固有周期周辺の狭帯域の周波数成分に対する減衰の非常に小さい共振現象と考えられる。日本海中部地震時の新潟でのスロッシング観測では、振幅10～15cm（加速度で 4～6 gal）で15波程度の共振正弦波に相当する地動が作用したものと推定された¹⁾。そこで正弦波入力に対する過渡応答を解析し、非線形性の影響について考察するものとする。解析モデルは表1に示す2種類のものを用いたが、モデルAは波高の増大とともに振動周期が増大する軟化バネ型の形状特性（深いタンク）を有するもので、モデルBは逆に硬化バネ型のものである。以下、モデルAの計算結果について述べる。減衰定数は各次とも 0.1% とした。

表1 解析モデル

モデル	直径 (m)	液深 (m)	基本周期 (sec)
A	60	20	8.83
B	60	10	10.96

(1) 水平方向入力

水平方向のみの入力に対し、入力加速度を 1～20gal にした場合のスロッシング応答を図5に示す。入力加速度の増大及び入力波数（経過時間）の増加とともに非線形性の影響が強くなり、0次、2次の短周期成分が増加してくる。線形解（即ち1次モードのみ）と比較すると波高の+側（上昇側）では線形解より大きくなり、波高の-側（降下側）では液位の低下が線形解より小さくなる。以下

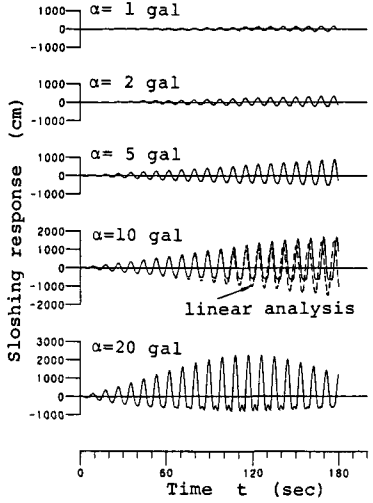


図5 正弦波入力過渡応答

+側の最大スロッシング高さを線形解と比較する。図6は入力加速度に対する応答波高の線形解との比 β_1 を、波数 n をパラメータにして示したものである。一部を除き、波高は線形解より大きくなっている。ただし、入力加速度が大きく波数も大きくなると線形解より逆に波高は小さくなっている。これは波高の増大とともに振動数の振幅依存性により入力振動数とのズレを生じ、共振状態から離れるためと解釈できる。図7は無次元波高 $\bar{h}$ （最大波高/タンク半径）に対し、 β_1 をプロットしたものである。入力加速度や波数 n の異なるものを一緒にプロットしてあるが、波高がタンク半径の0.1～0.2倍程度までは β_1 は単調に増加しており1つの直線上($\beta_1 = 1 + a\bar{h}$; a は $\bar{h}$ に依存する定数)に乗ってくる。このことは、比較的小さな波高の範囲では、共振正弦波に対する応答波高の非線形性は、入力加速度や波数には直接左右されず、その結果としての応答波高にのみ依存することを示している。この性質は後に述べるランダム波に対する応答についても概ね適合し、タンクのスロッシングの非線形性は、主として無次元波深(タンクの形状)と無次元波高により支配されることがわかる。

(2) 水平上下同時入力

水平上下同時入力の応答解析に先立ち、上下動入力の場合について検討を行った。その場合、初期条件として1cmの波高を有する1次モード形を与え、1次振動数の2倍の振動数の正弦波を入力した。その結果、入力40波(1次振動の20波に相当)に対する応答波高は、入力加速度が10galで約1.5cm、50galで5cm程度にしか増長せず、上下動単独では工学的に問題となるようなスロッシングは生じないことが分った。

次に、水平上下同時入力について検討を行った。入力動の振動数は、水平動に対し1次固有振動数 ω_1 、上下動に対しては $2\omega_1$ とし、両者の位相差 ψ をパラメータにとった。入力加速度は水平、上下とも10galとした。図8には波数 n に対して最大応答波高の線形解との比 β_2 を示した。図8には水平動のみのものも示したが、上下動の影響は ψ が 0° と -180° 、 -90° と -270° とでは逆の効果となっており、位相差によっては波高が上下動により逆に押えられることもあることが分る。また波数 n が15の場合をみると、水平動のみに非線形性の影響が約20%であるのに対し、上下動を加えるとそれが約35%($\psi = 0^\circ$)に増加し、このような入力条件の場合には上下動の影響を無視できないことが分る。

4. 実地震波入力に対する応答

日本海中部地震時の強震計記録としては、秋田における運輸省のSMAC記録、新潟及び苫小牧における気象庁1倍強震計記録(ただし新潟のものは振り切れた記録を修復したもの¹⁾)を用いる。また、タンク諸元については、秋田、新潟、苫小牧において実際にスロッシングが観測されたものを用いる。図9は水平動(NS成分)の

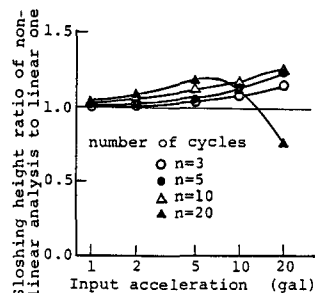


図6 入力加速度と線形解との波高比の関係

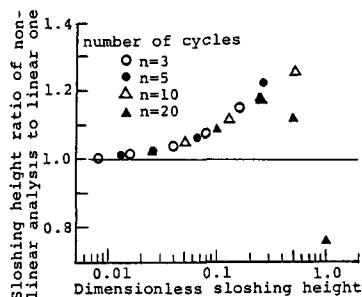


図7 無次元波高と線形解との波高比の関係

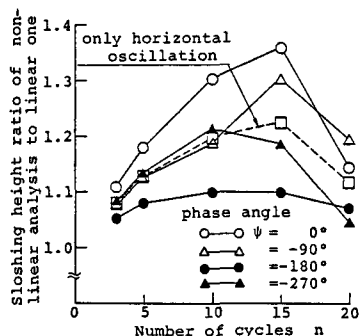


図8 上下動入力の影響(正弦波)

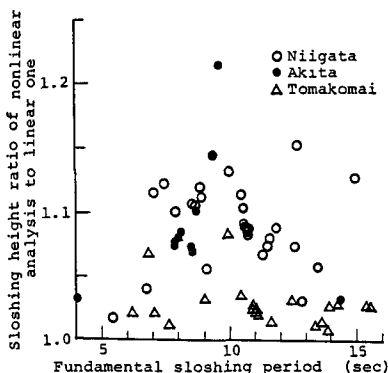


図9 水平動入力に対する線形解との波高比の関係

みの入力に対し、最大応答波高の線形解との比 β_1 を示したものである。線形解に対し、新潟で～15%程度、秋田で～20%程度、苫小牧で～10%程度の波高の増大がみられる。また、上下動を同時入力した時の最大応答波高を水平動のみの場合との比 β_3 を示したのが図10である。最大波高に及ぼす上下動の影響は各地とも～±2%程度で、工学的には無視し得る大きさと言える。

5. スロッシング高さから逆算した応答スペクトルと

強震計記録から求めた応答スペクトルとの比較

3章においては、スロッシング波高に対する非線形性の影響の大きさは正弦波入力の場合無次元波高の大きさに概ね比例することを述べたが、そのことは実地震波についても入力レベルを1.5倍及び2倍にして解析した結果より、ランダム波に対しても言えることが確認された。そこで各タンクの観測波高レベルにおける非線形性の影響の大きさ β_2' を比例計算により求め、それにより線形解を用いて逆算した地動の応答スペクトルの補正を行った。そして、それを強震計記録の応答スペクトル（2次元スペクトル）と比較したのが図11である。図11の（a）の新潟では強震計記録を修復して得られたものであるにもかかわらず、全体の傾向は良く対応しており、また周期8～10秒におけるスペクトルのピークにおいても、スロッシング波高によるものが230kineに対し、強震計記録によるものが190kineとまずまずの対応を示している。（b）の秋田では、各種の誤差の混入の可能性のあるSMACによるものであるが、両者の対応は良い。周期4秒及び8.5秒付近で両者に差が認められるが、強震計記録のスペクトルの谷部にあたっており、スペクトルのピーク値としては良い一致を示している。（c）の苫小牧では、良好な強震計記録を用いており、両者のスペクトルは広い周期範囲（5～16秒）にわたり極めて良い一致を示している。

以上の結果、スロッシングにおける非線形性の影響を考慮することによって、強震計記録から求めた応答スペクトルの値に、より近づけることができた。

謝辞

本研究を進めるに当たり、多大の御助言を賜った東京工業大学機械物理工学科助手木村康治博士及び当時大学院生（現石川島播磨重工業）内海雅彦博士に深く感謝します。

参考文献

- 1) 山田・家村・野田・嶋田；日本海中部地震による長周期（約5～15秒）地震動の工学的検討、第21回自然災害科学総合シンポジウム、1984年10月
- 2) 坂田・木村・内海；円筒タンク内の非線形液面揺動の非定常不規則応答解析、日本機械学会論文集 442号C編、1983年6月

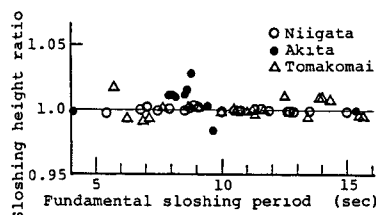


図10 非線形解析における上下動入力の影響

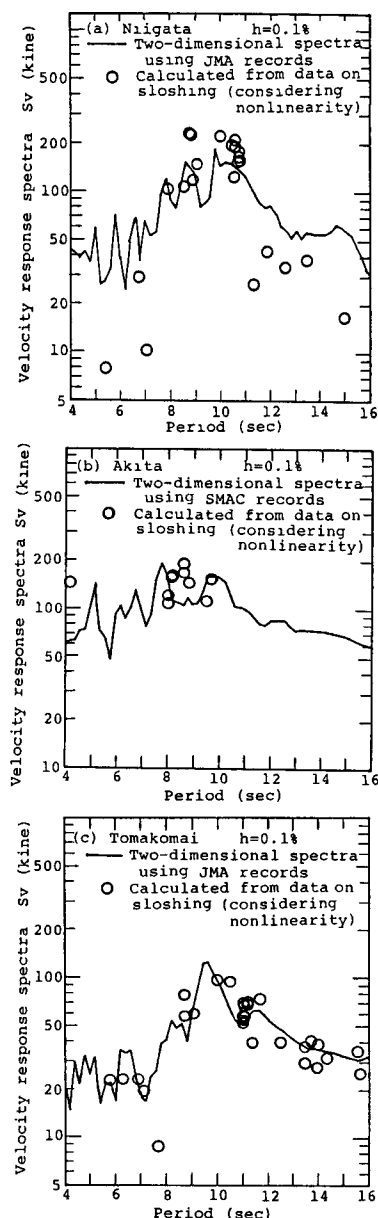


図11 スロッシング高さから強震計記録から求めたSvの比較（非線形性を考慮）