

(75) 弾性地盤における杭の杭頭インピーダンスに関する一解析法

舞鶴高専 正〇高谷 富也
神戸大学 工学部 正 北村 泰寿
神戸大学 工学部 正 桜井 春輔

1. まえがき 杭基礎の動的設計において、杭の動的応答は周辺地盤の影響を受けるため、杭を取り囲む地盤を含めた杭-地盤系の動特性、いわゆる動的相互作用効果を評価する必要がある。また、杭基礎-上部構造物の連成系において上部構造物の動的応答を調べる場合、杭頭でのばねおよび減衰効果を与える杭頭インピーダンスは重要な意味をもつ。本研究は、地盤中の杭の動的変位を求める一解析法を示すとともに、この解析法によって得られた杭頭インピーダンスについて報告する。解析手法として、杭の運動方程式において、時間に関しては調和振動とし、空間微分に関しては差分近似を導入する。地盤反力については、従来より多くの提案がなされているが、本研究では地盤を半無限弾性体、杭断面を円形と仮定して、弾性体内部のリンク分布加振力による変位解と利用して得られる地盤の剛性マトリックスによって地盤反力の評価を行う。

2. 解析手法 図-1に示す解析モデルにおいて、杭を1次元棒と考えるとき、地盤中の杭の縦振動および横振動の運動方程式はそれぞれ次の式のように表わされる。なお、本研究では調和振動と取り扱っているため、以下の記述では時間項を $e^{i\omega t}$ (ω : 円振動数) と省略する。

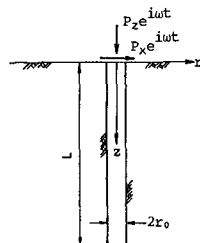


図-1 解析モデル

ここに、 ρ_p , E_p , A_p , I_p は杭の密度、ヤング係数、断面積、断面二次モーメント、 w , u は上下、水平変位である。また、 δ_v , δ_H は地盤から杭に働く単位長さ当たりの力である。いま、杭を等間隔 b で N 個に分割し、各分割点で中央差分をとれば、式(1), (2)はそれぞれ次の式のように書き直される。

$$(縦振動) \quad \omega^2 \rho_p A_p w + E_p A_p \frac{d^2 w}{dz^2} - \delta_v = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$(横振動) \quad \omega^2 \rho_p A_p u - E_p I_p \frac{d^4 u}{dz^4} - \delta_H = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$C_i \omega^2 \rho_p A_p b w_i + \frac{E_p A_p}{b} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) - C_i b \delta_v = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad \text{--- (3)}$$

$$C_i \omega^2 \rho_p A_p b u_i - \frac{E_p I_p}{b^3} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) - C_i b \delta_H = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad \text{--- (4)}$$

ただし、 $b=L/N$ (L : 杭長, N : 分割数), $C_i=1$ ($i=2, 3, \dots, N$), $C_1=C_{N+1}=1/2$ である。

一方、杭の境界条件は縦振動および横振動に対してそれぞれ次の式のように与えられる。

$$(縦振動) \quad \text{杭頭: } E_p A_p \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0} = -P_z, \quad \text{杭下端: } E_p A_p \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=L} = -R_z \quad \text{--- (5)}$$

$$(横振動) \quad \left. \begin{aligned} \text{杭頭: } & -E_p I_p \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0} = -M, \quad -E_p I_p \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \right)_{z=0} = -P_x \\ \text{杭下端: } & -E_p I_p \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=L} = -M_H, \quad -E_p I_p \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \right)_{z=L} = -R_x \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (6)}$$

ここに、 P_z , P_x , M は上下加振力、水平加振力およびモーメント加振力の荷重振幅、 R_z , R_x , M_H は杭下端の支持力である。杭頭および杭下端の分割点で中央差分をとれば、式(5), (6)の境界条件は差分式で表わされる。

たとえば、式(5)より、差分化した境界条件式を示すと次の式のようになる。

$$W_0 = W_2 + \frac{2b}{E_p A_p} P_2, \quad W_{N+2} = W_N - \frac{2b}{E_p A_p} R_2 \quad (7)$$

これらの差分化した境界条件式を考慮すれば、式(3)においては W_0 , W_{N+2} を、また式(4)においては U_{-1} , U_0 , U_{N+2} , U_{N+3} を消去することができる。

次に、地盤反力については、杭断面を円形と仮定して以下のように取り扱う。半径 r_0 の円周上に作用するリング加振力による変位解を $G(r, r_0)$ とすれば次式の関係式が得られる¹⁾。

$$g(r, r_0) = \int_0^{r_0} G(r, \bar{r}) g(\bar{r}) d\bar{r} \quad (r: \text{受振点の座標}) \quad (8)$$

ただし、 $g(r, r_0)$ は半径 r_0 の円形面上に作用する分布加振力による変位解、 $g(\bar{r})$ は半径 $\bar{r}$ の円周上に作用する分布加振力の荷重振幅である。式(8)より、 $G(r, r_0)$ は次式のようになる。

$$G(r, r_0) = \frac{1}{g(r_0)} \cdot \frac{\partial g(r, r_0)}{\partial r} \quad (9)$$

いま、筆者らによってすでに求められている円形等分布加振力による変位解²⁾と利用すれば、等分布リング加振力による変位解は容易に得られる。たとえば、上下方向のリング加振力による上下変位は次式のようになる。

$$W = - \frac{(1+\nu_s) Q_2}{2\pi E_s r_0^2} \int_0^\infty \frac{r W(r)}{\sqrt{r^2 - r_0^2} F(r)} J_0(r r_0) J_0(r r) dr \quad (10)$$

ここで、 ν_s は地盤のポアソン比、ヤング係数、 Q_2 はリング加振力の合力、 r_0 は地盤の横波の波数、 $J_0(\cdot)$ は0次のBessel関数である。なお、 $W(r)$, $F(r)$ は加振点と受振点の位置関係を含む波数 r の関数であるが、この関数形の詳細については文献³⁾に譲る。ところで、式(10)の Q_2 が式(3)における地盤反力 $Cib\delta_p$ ($i=1, 2, \dots, N+1$) の値ととれば、各分割点の変位と地盤反力は次式のように関係づけられる。

$$\{W\} = [\Delta] \{C\} b\delta_p \quad (11)$$

ここで、 $\{W\} = \{W_1, W_2, \dots, W_{N+1}\}^T$, $\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_{N+1}\}^T$, $[\Delta]$ は式(10)を利用して得られる影響係数マトリックスである。したがって、式(11)より、式(3)の地盤反力の項は次式のように得られる。

$$\{C\} b\delta_p = [\bar{S}] \{W\} \quad ([\bar{S}] = [\Delta]^{-1}) \quad (12)$$

一方、杭下端の支持力については、円形面に作用する剛板分布加振力による変位解と利用する。たとえば、上下方向の剛板分布加振力による上下変位は次式のように求められている²⁾。

$$W = - \frac{(1+\nu_s) Q_2}{2\pi E_s r_0^2} \int_0^\infty \frac{W(r)}{\sqrt{r^2 - r_0^2} F(r)} \sin(r r_0) J_0(r r) dr \quad (13)$$

ただし、 Q_2 は剛板分布加振力の合力である。上式の Q_2 が式(5)の地盤反力 R_2 の値ととると、次式の関係式が得られる。

$$R_2 = \alpha_R W_{N+1} \quad (\alpha_R \text{ は式(13)より得られる値の逆数}) \quad (14)$$

以上より、式(3)と式(5)の境界条件、式(11)の杭周辺の地盤反力、式(14)の杭下端の支持力を考慮すれば、上下加振による杭の運動方程式は次式のように書き表わすことができる。

$$(\omega^2 [M] + [T] - [\bar{S}]) \{W\} = \{\hat{P}\} \quad (15)$$

ただし、 $\{\hat{P}\} = \{-2P_2, 0, \dots, 0\}^T$

$$[M] = \int_p A_p b \begin{bmatrix} 1/2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix}, \quad [T] = \frac{E_p A_p}{b} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad [\bar{S}] = [\bar{S}] + \begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ & & & \\ 0 & & & 2\alpha_R \end{bmatrix}$$

また、水平加振による杭の運動方程式については、上下加振の場合と同様の手順で変形すれば、式(15)と同形の式と得ることができる。

3. 分割数による解の収束性

図-2~4 は分割数による杭変位の変化を示したものである。一般に、差分法の精度は分割長の2乗に比例すると言われている。両端支持ばりの固有振動数の精度を調べた結果によれば、対象としている次数の10倍程度の分割数が必要である³⁾。いま、本研究で解析した杭は両端自由の棒と考えるとき、第1次の固有振動数は縦振動で $\lambda_p L (= \omega L / \sqrt{E_p I_p / A_p \rho_p}) = \pi$ 、横振動で $\lambda_s L (= \sqrt{\omega L} / \sqrt{E_p I_p / A_p \rho_p}) = 4.73$ となる。図-2 は上下振動で $E_p/E_s = 10$ のときの結果であるが、振動数が $\lambda_p L = 1.0, 3.0$ のいずれにおいても8分割程度で収束していることがわかる。この場合、杭と地盤の相対剛性 E_p/E_s が小さいため、杭自体の振動特性は現れず、地盤の動特性に支配されていると言える。一方、図-3 は $E_p/E_s = 1000$ のときの上下振動に対する結果であるが、 $\lambda_p L = 1.0$ では10分割程度で収束しているのに対して、 $\lambda_p L = 3.0$ では15分割でも収束する様子がみられない。この場合、杭と地盤の相対剛性が大きく、杭の振動特性が現れており、1次の固有振動数に近い $\lambda_p L = 3.0$ では、前述の両端支持ばりに対する分割数よりも多くの個数に分割することが要求される。図-4 は、

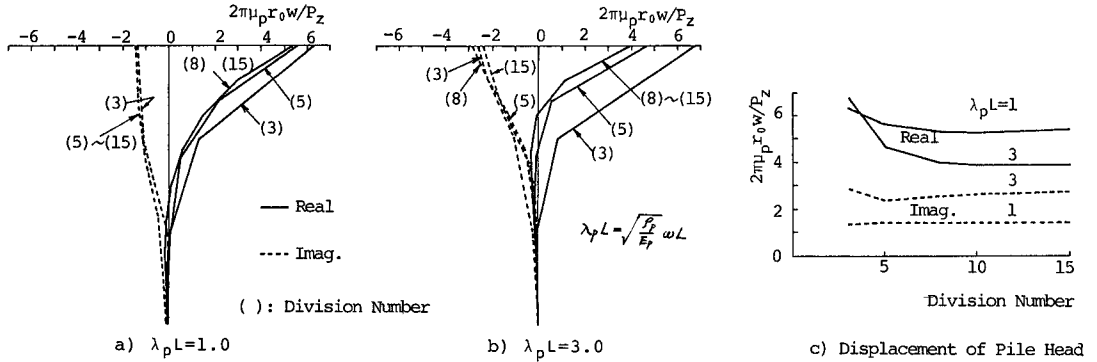


図-2 分割数による杭変位の収束性 (上下振動, $E_p/E_s = 10$)

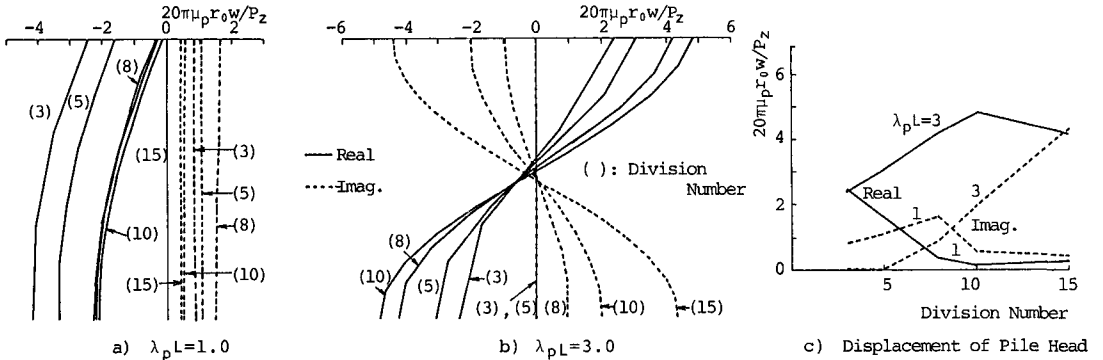


図-3 分割数による杭変位の収束性 (上下振動, $E_p/E_s = 1000$)

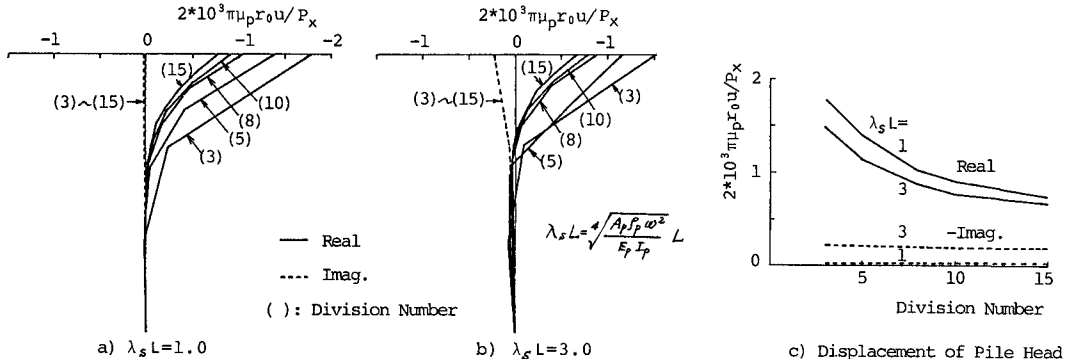


図-4 分割数による杭変位の収束性 (水平振動, $E_p/E_s = 1000$)

$E_p/E_s=1000$ のときの水平振動で、杭下端のモーメント反力 (R_H) を無視した場合の結果であるが、図-2の場合と同様の傾向となっており、水平振動においては $E_p/E_s=1000$ は相対剛性として小さいと判断できる。

4. 杭頭インピーダンス 図-5は、先に検討した図-2~4の解析モデルにおいて分割数を10として、振動数による杭頭インピーダンスの変化を示したものである。図-5a), c) では、振動数に対して杭頭インピーダンスは単調な変化となっているが、図-5b) では顕著な変化を示している。いま、このケースに対して、 $\lambda_p L$ の変化による杭の変位分布の推移を示すと図-6のようになる。同図より、 $\lambda_p L=0.75 \sim 1.75$ 付近では杭は剛体モードから1次モードに移行しており、杭頭変位は $\lambda_p L=1.5$ 前後で非常に小さくなっている。この現象によって、図-5b) に示す杭頭インピーダンスは $\lambda_p L=1.0 \sim 1.5$ で著しい変化を呈したことがわかる。

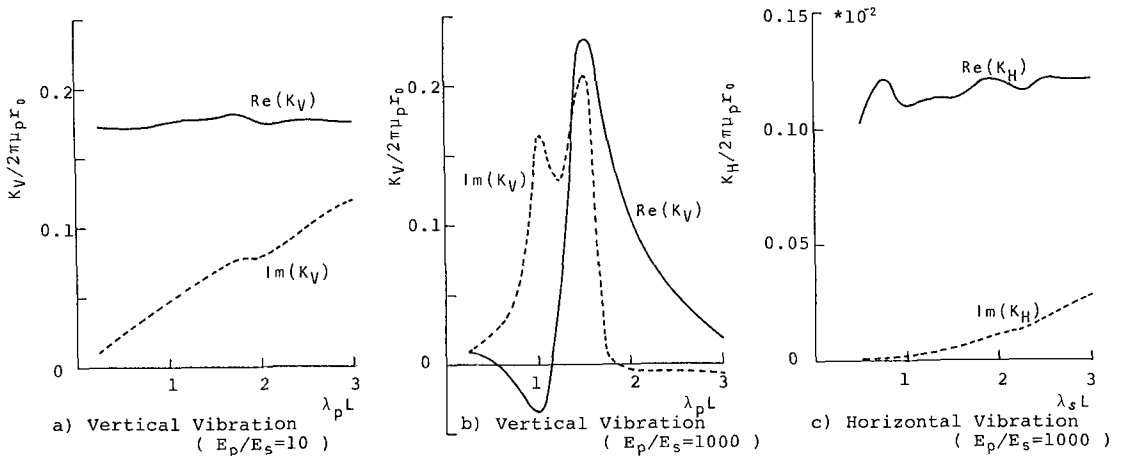


図-5 杭頭インピーダンス

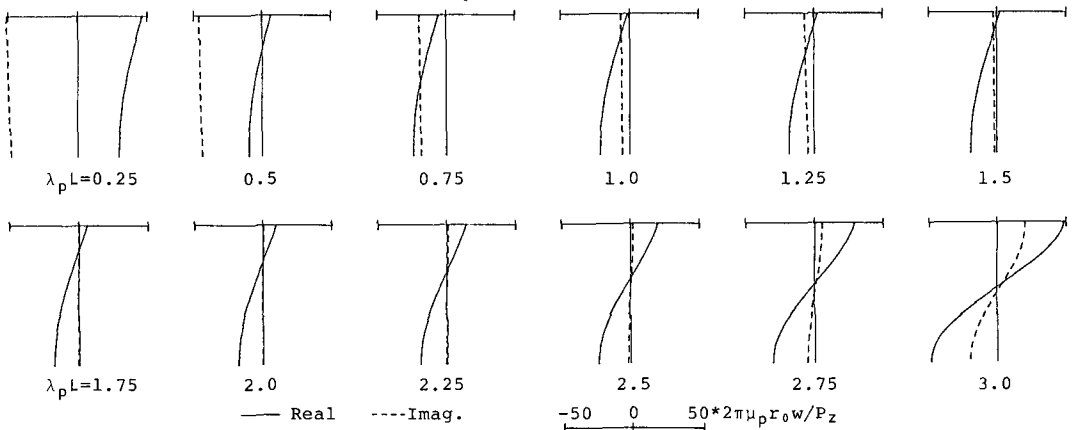


図-6 各振動数 ($\lambda_p L$) における杭の上下変位分布 ($E_p/E_s=1000$)

5. あとがき 本研究では、杭の運動方程式に差分近似を用い、地盤反力の評価にリング加振力による変位解と利用する解析法を示した。差分法の精度は用いる差分式によって決まるため、精度向上のためには高精度差分式の導入も必要であろう。また、弾性波動論によって得られるリング加振力による変位解を用いたが、この変位解の数値積分は計算が煩雑で演算コストも掛かるため、今後実務面への応用に際しては変位解の近似化などが要求される。その際、Kausel によって文献1)に得られている変位解などは非常に有用であろう。

参考文献 1) E. Kausel : MIT Report, 1981. 2) T. Takatani, et al. : JWC EE, 1984.

3) 小坪清真 : 土木振動学, 1973.