

## 1. まえがき

コンクリートステープ・サイロ壁体構造は、図1のように組合せながら円筒状に積上げたステープ（コンクリートブロック）および外壁を締付けたロッド（鉄筋）から構成されている。ステープ相互は上下・両側面の凹凸で、一種のさねはぎ結合となっている。しかし、モルタルなどの接着材は使用されていない。この不連続な壁体構造は、ステープ継目の挙動に起因すると考えられる履歴変力特性および非線形応答特性を示すほか、ステープには歪が生じないことか、ステープ・サイロ使用後振動実験から得られている。

本報告はステープ・サイロ壁体構造のステープ組合せ部分に着目し、二次元剛体-ロッド系のひとつの解析モデルについて述べたものである。ここでは、隣接剛体間に結合要素を用いない定式化を試みた。

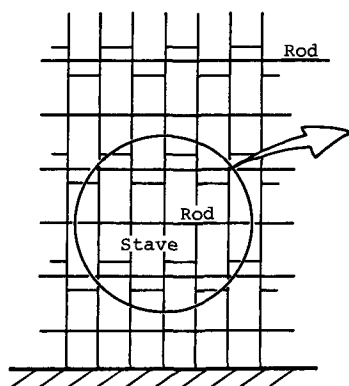


図1 ステープ・サイロ壁体構造

## 2. 剛体-ロッド系の解析モデル

ここで提示する『剛体-ロッド系解析モデル』の概略を以下に述べる。垂直平面内の二次元運動を取り扱う。剛体は結合しているロッドは、その両端の締合点における水平方向相対変位に抵抗する伸縮剛性を有す。剛体-ロッド系の変形後も、上下に隣接する剛体は左右いずれかの頂点で接触する。左右に隣接する剛体の場合は高さも異なるので、上下いずれかの頂点と辺とで接触する。この接触点は両剛体の回転角の大小関係で変わる。

隣接剛体の接触点において、境界線垂直方向の相対変位を零とする「変位拘束条件式」を導入する。ただし、剛体相互が重複することは全くない。また、境界線接線方向の相対変位（ズレ）には、摩擦力等の抵抗は考えらる。ここでは簡単のため、「接触点で接線方向の相対変位に比例する抵抗力（ズレ抵抗力）」を導入する。

2.1 隣接剛体間の運動学的関係式 一般に、変形前に接触していた隣接剛体の頂点は、変形後の相対変位を生じる。本節では、その相対変位量と各剛体の変位・回転量との関係式を示す。この関係式は接触点における変位拘束条件式およびズレ抵抗力の算定に用いられる。

上下に隣接した剛体に関して、その変形前後の運動学的関係を図2に示す。剛体①、②の幅は  $2b$ 、高さはそれぞれ  $2h_1$ 、 $2h_2$  である。また、剛体重心位置  $G$  の水平方向（X軸方向）、鉛直方向（Y軸方向）変位および回転角を  $u, v, \theta$  とする。頂点の変形後の相対変位  $\delta_{ij}$  は、図4の1/4の場合から、剛体の回転角が微小な場合 ( $\theta_i, \theta_j \ll 1$ )、

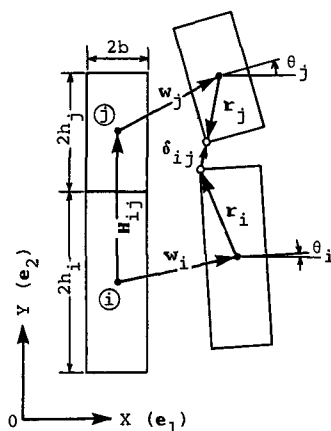


図2 上下剛体間の運動学的関係

$$\delta_{ij} = [(y_j - u_i) + (h_i \theta_i + h_j \theta_j)] e_1 + [(y_j - v_i) - \text{sgn}(\alpha_{ij}) b (\theta_j - \theta_i)] e_2 \quad (1)$$

となる。ここで、 $e_1, e_2$  は X, Y 軸方向の単位ベクトル。また、 $\alpha_{ij} = \theta_j - \theta_i \geq 0$  の時、 $\text{sgn}(\alpha_{ij}) = +1$ ;  $\alpha_{ij} < 0$  の時、 $\text{sgn}(\alpha_{ij}) = -1$ 。この符号の交代は、境界線上の左右の頂点の切換えに対応する。

もし、剛体②が剛体①上にあり、剛体②の回転を考慮しない場合は、

ここで、 $U_0(t)$ ,  $V_0(t)$  は図床の水平方向、鉛直方向変位を表わす。

図3は左右に隣接した剛体の変形前後の運動学的関係である。ただし、この場合は剛体①、②の高さは2倍、2倍の太さの剛体である。両剛体軸心の鉛直方向距離を  $d$  とし、変形前の頂点と辺の接触位置が異なる。これを考慮すると、剛体の回転角が異なる場合 ( $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ )、相対変位  $\delta_{12}$  は次式で得られる。

この時、 $\Phi, \Psi$  は、 $\tilde{h} = h + \sin(\alpha k) d$  とおくと、 $\tilde{h} \geq \tilde{h} \wedge \tilde{h}$ ,  $\Phi = \tilde{h}$ ,  $\Psi = \tilde{h}$ ;  $\tilde{h} < \tilde{h} \wedge \tilde{h}$ ,  $\Phi = \tilde{h} - \sin(\alpha k) d$ ,  $\Psi = \tilde{h} \wedge \tilde{h}$ 。

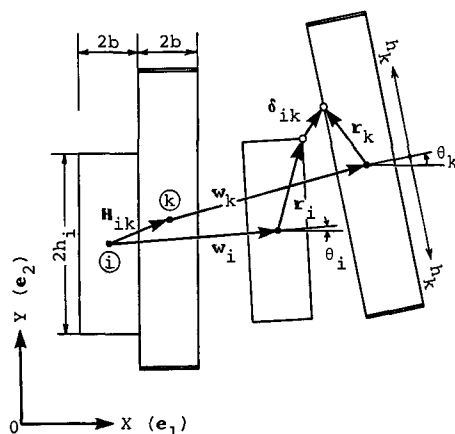


図3 左右剛体間の運動学的関係

『運動方程式』 左右前後剛体が衝突後も必ず接触し、ゆがみ剛体相互が重複しないためには、(3)式が本平成分が零となり得なければならない。すなわち、

また、剛体-ロッド系全体の水平運動を拘束したり、剛床土にある1つの剛床と剛床との水平方向相対変位を零とする。すなわち、(2)系の水平成分を零とおくと、

同様、上下直接剛体が変形後も接触し、さらに剛体  
相互が重複しないから、(1)式の鉛直成分を零とおき、

また、剛床土・全剛床に関する(2)式の鉛直成分を零とすると、  

$$\{\bar{u}_j - \bar{u}_j(t)\} - \sin(\theta_j) b \bar{q}_j = 0 \quad \dots\dots\dots (5.b)$$

ある。その後、得られた式から水平変位 $U$ 、鉛直変位 $V$ を  
④電角 $\Theta$ と表わす方法として、高温ガス炉炉心の $\Theta$ の計算に  
おける温度変換条件式の定式化を参照する<sup>(2)</sup>。剛性-ロッド端の  
変位拘束条件式は次式の如く得られる。

$$Q_i + \sum_{k=1}^N B_{ik}(Q_k - \sigma_k(t)) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

ここで、 $N$ は全剛体数である。以後の定式化のため、剛体本重心の水平変位ベクトル $\{u\}$ 、鉛直変位ベクトル $\{v\}$ 、回転角ベクトル $\{\theta\} \in \mathbb{R}^3$ を用い、これらの有限要素はベクトル $\{u, v, \theta\}$ で表す。

$$\{\dot{U}\} + [B]\{\theta\} - U_0(t)\{1\} = \{0\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで,  $\{1\}$ ,  $\{0\}$  はそれぞれ単位元, 零元を表す。↑

↓ 一般に,  $C$  個の変数  $x_i$  に対する  $n$  自由度の  $m(C-n)$  個の拘束条件式

がある場合、この系の運動方程式は次で与えられる。<sup>3)</sup>

ここで、 $T$  および  $V$  は系の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、 $Q$  は一般力、 $\lambda_k$  は Lagrange の拘束数、 $t$  は時間微分を表わす。剛体一般化系では、変位座標系式 (6), (7) が (10) 式に相当する。したがって、(11) 式に (6), (7) 式を代入し、各変位・回転角毎にマハラクス表示すると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{2T}{2\{\dot{\sigma}\}} \right) - \frac{2T}{2\{\sigma\}} + \frac{2V}{2\{\sigma\}} = \{\lambda^{\sigma}\} \dots (12.b)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2T}{2\theta}\right) - \frac{2T}{2\theta} + \frac{2V}{2\theta}$$

$$= [A]^T \{\lambda^u\} + [B]^T \{\lambda^v\} \dots (12.c)$$

となる(但し、 $\{Q_i = \{0\}\}$ )。ここで、 $\lambda^U$ ,  $\lambda^V$  は  $S_H$   
上の、変位条件系  $(8)$ ,  $(9)$  に対応する族数値  $\psi$ 。  
また、上付記号  $T$  は変位条件  $\mu$  の  $A$ ,  $B$  位置  
マトリックスである。

23 剛体-ロケットの運動方程式 剛体の本平  
方向にロケットが結合し、隣接剛体は変形後にも滑り  
貞点と接触する(重複はない)。前節と導出する  
束条件式を満足する剛体-ロケット運動方程式を導出する。  
特に、この系の運動方程式は次のようになる。

$T = \frac{1}{2} (\dot{U})^T [M] \dot{U} + (\dot{U})^T [m] \dot{U} + \{\dot{\theta}\}^T [I] \dot{\theta} \dots (13)$   
 ここで、 $[M]$ 、 $[I]$ は各剛体の質量、慣性モーメントを対角成分とする対角マトリクスである。

剛体は接触するポイント、両面から各剛体の重心を通る垂直線上に固定され、その両面接触点の水平方向相対変位に抵抗する伸縮剛性(剛性定数 $K_R$ )を持つとすると、ポイント系で示すは、

$$T_R = \frac{1}{2} K_R \sum (d_i - d_j)^2 = T_R (\dot{U}), \{\theta\} \dots (14)$$

ここで、 $d_i, d_j$ はポイント間の接触点における水平変位。また、 $\partial T_R / \partial \dot{U} = [F_R^U] \dot{U} + [F_R^\theta] \dot{\theta}$ ,  $\partial T_R / \partial \dot{U} = \{0\}$ ,  $\partial T_R / \partial \dot{\theta} = [M_R^U] \dot{U} + [M_R^\theta] \dot{\theta} \dots$ 以上(15)

ここで、 $[F_R^U]$ 等はポイントに関する部分剛性マトリクスを意味す。

隣接剛体の接触点で、境界線接線方向の相対変位に比例するスリ抵抗(比例定数 $K_s$ )を仮定する。上下剛体間での相対変位は(14)の水平成分、左右剛体間での相対変位は(15)の垂直成分から、それぞれ次の式となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij}^x &= [(y_j - y_i) + (h_i \theta_i + h_j \theta_j)] \\ \delta_{ik}^y &= [(x_k - x_i) - b(\theta_i + \theta_j) \\ &\quad + \{d + \text{sgn}(\theta_{ik}) (\Phi - \Psi)\}] \end{aligned} \right\} (16)$$

したがって、スリ抵抗のポテンシャルエネルギーは、

$$T_s = \frac{1}{2} K_s [\sum (\delta_{ij}^x)^2 + \sum (\delta_{ik}^y)^2] = T_s (\dot{U}), \{\theta\}, \dots (17)$$

と表わされ、この式から  $\partial T_s / \partial \dot{U} = [F_s^U] \dot{U} + [F_s^\theta] \dot{\theta}$ ,  $\partial T_s / \partial \dot{U} = [F_s^U] \dot{U} + [F_s^\theta] \dot{\theta}$ ,  $\partial T_s / \partial \dot{\theta} = [M_s^U] \dot{U} + [M_s^\theta] \dot{\theta}$  以上(18)  
 ここで、 $[F_s^U]$ 等は接触点でのスリ抵抗に関する部分剛性マトリクスである。

自重のポテンシャルエネルギーは、

$$W = \{\dot{U}\}^T \{m\} g \dots (19)$$

であり、 $\partial W / \partial \dot{U} = \{m\} g$ ,  $\partial W / \partial \dot{U} = \partial W / \partial \dot{\theta} = \{0\}$  (20)となる。ここで、 $\{m\}$ は各剛体の質量とその成分とする質量ベクトル、 $g$ は重力加速度を表す。以上において、この剛体-ポイント系のポテンシャルエネルギーが次式で与えられる。

$$V = T_R + T_s + W \dots (21)$$

前節の Lagrange ベクトル  $\lambda^U, \lambda^\theta$  を含む Lagrange の運動方程式(12a)~(12c)に(13)、(21)式を代入し、(15)、(18)、(20)式を用いて整理すると、

$$[M] \{\ddot{U}\} + [F^U] \dot{U} + [F^\theta] \dot{\theta} = \lambda^U \dots (22a)$$

$$[M] \{\ddot{\theta}\} + [F^\theta] \dot{U} + [F^\theta] \dot{\theta} = \lambda^\theta \dots (22b)$$

$$[I] \{\ddot{\theta}\} + [M^U] \dot{U} + [M^\theta] \dot{\theta} + [M^{\theta\theta}] \ddot{\theta} = [A] \lambda^U + [B] \lambda^\theta \dots (22c)$$

ここで、 $[F^U] = ([F_R^U] + [F_s^U])$  等である。さらに、拘束条件マトリクス $[A]$ 、 $[B]$ は定数マトリクス(隣接剛体の回転角の大小関係で符号が変わる項を含む)であるから、変位拘束条件式(8)、(9)を時間 $t$  に関して微分することにより、次の加速度拘束条件式が得られる。

$$\{\ddot{U}\} + [A] \{\ddot{\theta}\} - \ddot{U}_0(t) \{1\} = \{0\} \dots (23)$$

$$\{\ddot{\theta}\} + [B] \{\ddot{U}\} - \ddot{\theta}_0(t) \{1\} = \{0\} \dots (24)$$

最後に、(22a)、(22b)式に $\lambda^U, \lambda^\theta \in (22c)$ 式に代入し、さらに(8)、(9)式は(23)、(24)式を用いて、変位ベクトル $\{U\}, \{\theta\}$ 、加速度ベクトル $\{\ddot{U}\}, \{\ddot{\theta}\}$ を消去すると、剛体重心の回転角に関する剛体-ポイント系の運動方程式が次式のように得られる。

$$[J] \{\ddot{\theta}\} + [K] \{\theta\} = \{F\} \dots (25)$$

ここで、 $[J] = [J] + [A]^T [M] [A] + [B]^T [M] [B]$ ,  $[K] = [M^{\theta\theta}] + [A]^T [F^U] [A] + [B]^T [F^\theta] [B] - [A]^T [F^\theta] + [M^U] [A] - ([B]^T [F^\theta] + [M^{\theta U}] [B])$ ,  $\{F\} = [A]^T \{m\} \ddot{U}_0(t) + [B]^T \{m\} (\ddot{\theta}_0(t) + g) + ([A]^T [F^U] - [M^U]) \{1\} \ddot{U}_0(t) + ([B]^T [F^\theta] - [M^{\theta U}]) * \{1\} \ddot{\theta}_0(t) = [A]^T \{m\} \ddot{U}_0(t) + [B]^T \{m\} (\ddot{\theta}_0(t) + g)$ 。

### 3. 数値計算例

前章で導出した剛体-ポイント系の数値計算例として、図4に示す剛体-ポイント系を考える。

剛体上に置かれた4個の剛体にかかる本ポイント系で示している。この系は最も簡単なスリ接触部分を含むように、スリサロ型本構造の一部を抽出したものである。

以下に計算では、各剛体の幅 $2b=8.0\text{cm}$ 、高さ

$2h=23.5\text{cm}$  および  $2a=7.0\text{cm}$ 、単位体積重量 $\omega=24 \times 10^{-3} \text{kgf/cm}^3$ 、重力加速度 $g=980.0 \text{cm/sec}^2$ 、ポイント伸縮剛性定数 $K_R=100.0 \text{kgf/cm}$ 、接触点でのスリ抵抗の比例定数 $K_s=20.0 \text{kgf/cm}$ の値を用いた。

動力和静力学に支立し、図4の剛体-ポイント系について静的解析を行った。運動方程式(22a)~(22c)

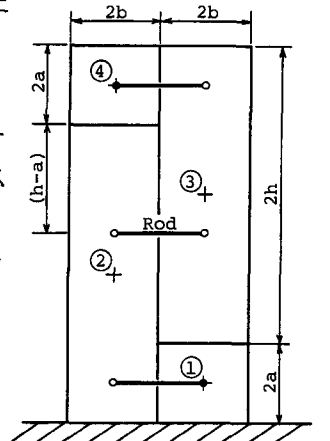


図4 基本的剛体-ロッド系

から慣性力項を除き、各式の右辺に剛体重心での外力項 $\{\dot{Q}\}$ ,  $\{\dot{Q}^T\}$ を加えた後、四角角に関する運動方程式の整理過程と同様に変位式により、静的組合方程式

$$[K]\{Q\} = \{Q\} \quad (26)$$

が得られる。ここで、 $\{\dot{Q}\} = \{\dot{Q}^T\} - [A]\{\dot{Q}^T\} - [B]^T * (\{\dot{Q}^T\} - \{m\}g)$ 、また $[K]$ は(25)式のものと同である。

左上の剛体④の重心位置に水平荷重 10 kgf を加えた場合の静的解析結果を図5に示す。この解析モデルによると、隣接剛体あるいは剛床との境界で、接触・分離をうまく表現出来ることか、図6からわかる。なお、剛体①～④の水平変位はそれぞれ 0.266, 1.15, 1.88, 2.66 cm であった。参考までに、剛体境界に Goodman の当点要素<sup>4)</sup>を配置した解析モデルによる計算結果を図6に示す。このモデルは、剛体頂面および底面に節点をおき、節点変位、剛体重心位置の変位、四角角と関連する変位も考慮し、節点間の関係と、その詳細は省略させて頂く。計算では、当点要素のせん断方向弾性係数と図5におけるスリ抵抗の比弾性係数を一致させた。また、垂直方向剛性係数は  $K_N = 200 \text{ kgf/cm}$  を用いた。

最後に、これらの動的応答解析結果を示す。図7は、剛床を水平方向に正弦波加振の幅 1.0 cm、振動数 10.0 Hz を加振した場合、剛体②～④の水平変位の波形(絶対変位)である。運動方程式の数値積分は Wilson の方法を用い、時間刻み  $\Delta t = 1/100 \text{ sec}$  で行った。また、図8は最大応答値を含む 0.4~0.5 sec での、剛体-ロッド系の変形状態の連続表示である。この系の解析モデルでは、ロッドの伸縮剛性およびスリ抵抗の比弾性係数とも定数を用いているが、図7の応答波形には振幅の増減が見られる。

#### 4. あとがき

以上、変位拘束条件を用いた二次元剛体-ロッド系の解析モデルおよび簡単な数値計算例を示した。今後、数値解析と模型実験から、この解析モデルの検討・改良を続け、スリ・加圧壁本構造の非線形性に関する動的挙動を明らかにしたい。

#### 参考文献

- 1) 佐々木、芳村、豊徳：コンクリートスティブ・サイロの動的挙動に関する模型振動実験、第6回日本地震工学シンポジウム講演集、1982。
- 2) Lee, T.H.: Nonlinear Dynamic Analysis of a Stacked Fuel Column Subjected to Boundary Motion, Nuclear Engineering and Design 32, 1975.
- 3) Clough, R.W. and J. Penzien: Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.
- 4) Goodman, R.E., R.L. Taylor and T.L. Brekke: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 3, 1968.

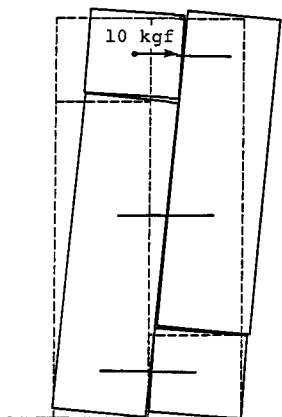


図5 剛体-ロッド系の静的解析結果  
(変位拘束条件式)

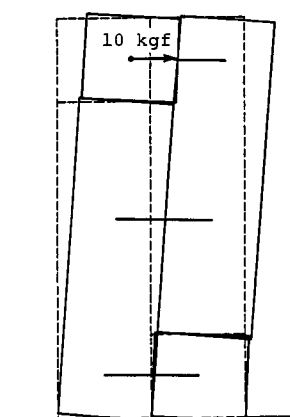


図6 剛体-ロッド系の静的解析結果  
(ジョイント要素)

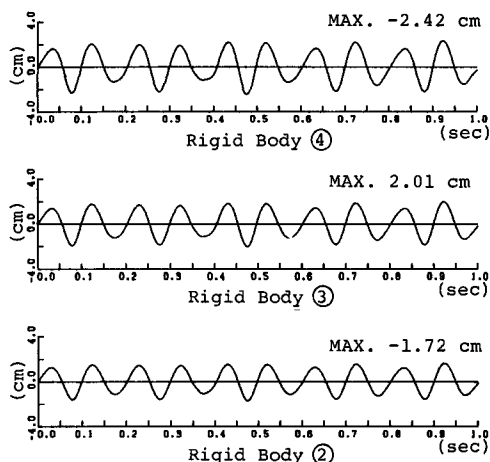


図7 剛体重心での水平変位応答波形(正弦波加振)

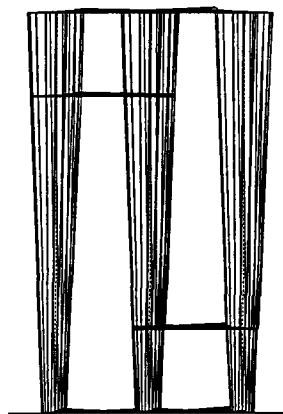


図8 正弦波応答時の変形状態  
[0.4~0.5 sec]