

(41) 構造物の固有振動特性に及ぼす地盤との動的相互作用効果

京都大学防災研究所 佐藤忠信

京都大学防災研究所 土岐憲三

愛知県

中尾恭啓

1. まえがき

構造物の耐震設計では地震荷重下での構造物の応答値を推定する必要があり、構造物の振動解析に基づいてそれを求めなければならないような場合が生じる。構造物が剛な基盤に支持されているような場合には地盤と構造物の間の動的相互作用を考慮する必要がないので、応答値はモード解析法を用いて評価されることが多い。しかし、一般の地盤-構造物系の解析では地盤との相互作用を考慮に入れると基準モードの直交性が保証されなくなるので、サブストラクチャー法などを用いた煩雑な解析を行なわなければならない。この場合には得られる結果は数値解だけであり、系の動的応答特性を評価するための一般的な関係式を誘導することは困難である。ここでは、構造物の耐震設計に際して、地盤との動的相互作用をどのように評価すべきかについて考察を加える。通常の耐震設計では、構造物の応答値はモード解析法を用いて評価されるので、地盤との動的相互作用効果を考慮に入れると、構造物の固有振動数ならびに固有減衰定数がどのように変化するかについて詳細な検討を加える。この結果を基にして、上部構造物の非減衰固有モードと固有振動数のみから、相互作用系に等価な固有振動数ならびに減衰定数を決定するための方法論を構築する。

2. 地盤-構造物系の振動解析

地盤-構造物系の動的相互作用を考慮した多自由度系の固有値解析を行う。基礎の振動としては、ロッキング振動と水平振動との連成振動を考え、上部構造物は、集中質量形の多自由度系に置換した。簡単のため各々の質点の質量慣性モーメントは無視すると、運動方程式は次式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} [m] & \{m\} & \{mb\} \\ \{m\}^T & M + \sum m_i & \sum m_i h_i \\ \{mb\}^T & \sum m_i h_i & I_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_b \\ \psi_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [c] & 0 & 0 \\ 0 & C_{XX} & C_{XR} \\ 0 & C_{RX} & C_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_b \\ \psi_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k] & 0 & 0 \\ 0 & K_{XX} & K_{XR} \\ 0 & K_{RX} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_b \\ \psi_b \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

ここに $[m]$ 、 $[C]$ 、 $[k]$ は各々上部構造物の質量、減衰係数ならびに剛性マトリックスである。上部構造物のマトリックス $[C]$ は、 $[C] = \alpha [K]$ とし、 $\alpha = 0.008$ を用いた。また基礎の重量は5000tとした。 M, I_b は基礎の質量と慣性モーメント、 $C_{XX}, C_{XR}, C_{RX}, C_{RR}$ は基礎の減衰係数を、 $K_{XX}, K_{XR}, K_{RX}, K_{RR}$ は基礎の剛性を定義する定数であり、各々地盤のせん断波速度、ポアソン比、基礎の形状などによる関数として表わされる。¹⁾

一般に式(1)における減衰マトリックスは非比例減衰特性を有しているので複素固有値解析を行わなければならない。この場合、基礎系を含めた構造物の自由度を n とすれば、式(1)で与えられる運動方程式の固有値 $\lambda_n (n=1, \dots, n)$ は $\lambda_n = a_n \pm i b_n$ となる。一方減衰係数マトリックスが比例減衰から構成されるとすると式(1)の固有値 λ_n は $\lambda_n = -\omega_{0n} h_n \pm i \sqrt{1 - h_n^2} \omega_{0n}$ と表わされる。ここに、 ω_{0n} は非減衰系の n 次の固有円振動数であり、 h_n は n 次の減衰定数である。両者を等値することにより等価非減衰固有円振動数ならびに減衰定数が次式のように与えられる。²⁾

$$\omega_{0n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad h_n = -a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2)$$

以下では、上部構造物の重量(W)を変化させた場合に、全体系の等価な固有振動数および減衰定数がどのように変化するかを、地盤のせん断波速度(V_s)をパラメータとして示す。まず、上部構造物を1質点系とした場合について考察を加える。なお、基礎の形状はロッキングの卓越振動数が、水平振動のそれよりも大きくなるように設定した。上部構造物の固有振動数は2Hzになるように重量とバネ定数の比を一定に保って解析を行った。図1は、上部構造物の高さを固定して解析したときの等価固有振動数の変化を示す曲線(振動数曲線と名付ける)である。図(a)は、上部構造物の重量が10tのときのものである。上部構造物の重量が基礎に比べて無視できるほど小さいため、上部構造物の振動数曲線と基礎の振動数曲線は交差しており、振動モードの連成は発生していないことがわかる。図(b)は、上部構造物の重量を100tにしたときの振動数

曲線である。せん断波速度 V_s が A の値のところで、上部構造物と基礎のロッキング振動とが連成をおこしており、 V_s が B の値のところでは、上部構造物と基礎の水平振動とが連成をおこしている。また基礎の水平振動の傾きが、図(a) に比べて著しく下がっていることがわかる。

図2は等価減衰定数の変化を示す曲線である。図(a) では V_s の値が A のところで、(2) と (3) の曲線が入れかわり、B のところで (1) と (2) の曲線が入れかわっている。一番上の曲線が基礎の水平振動に対する減衰定数を、上から2番目の曲線が基礎のロッキングに対する減衰定数を、一番下の曲線は、上部構造物の減衰定数を与えている。このことは、連成を無視した場合の上部構造物の減衰定数が5%、基礎のロッキング振動の減衰定数が13% であることから確かめられる。なお、基礎の水平振動モードに対する減衰定数が、一定値にはならず V_s の増加とともに減少するのは、図1 (a) の (2) の曲線が上側に凸になっているためである。図(b) では、 V_s の値が A のところで (2) と (3) の曲線が交差し、 V_s の値が B のところで (1) と (2) の曲線が入れかわっている。これは振動数曲線からも明らかに V_s の値が A のところで

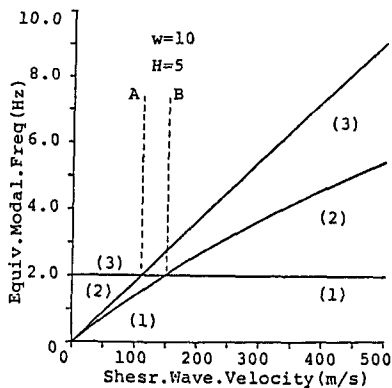


図1 等価固有振動数曲線 (a) $w=10t$ (b) $w=100t$

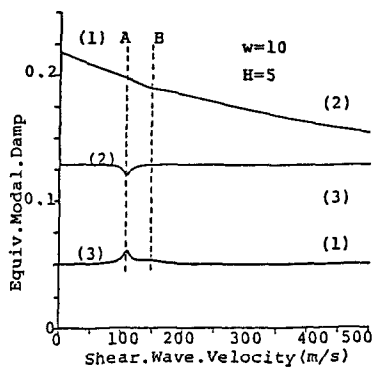
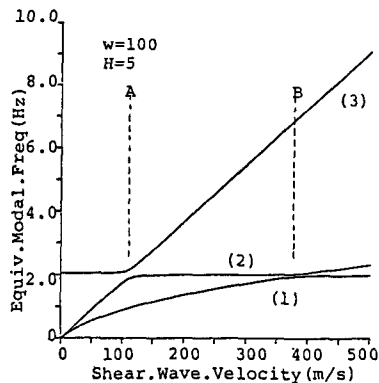
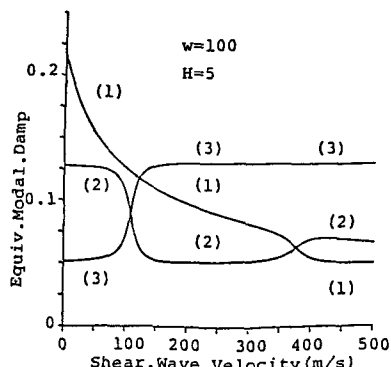


図2 等価減衰定数曲線



(a) $w=10t$ (b) $w=100t$

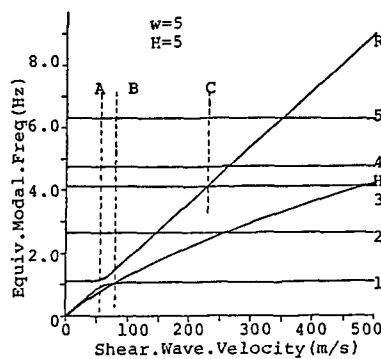


図3 等価固有振動数曲線

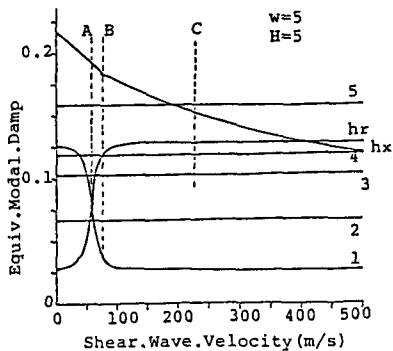
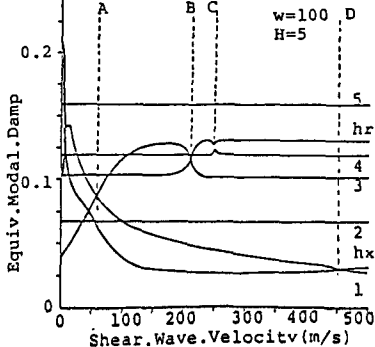
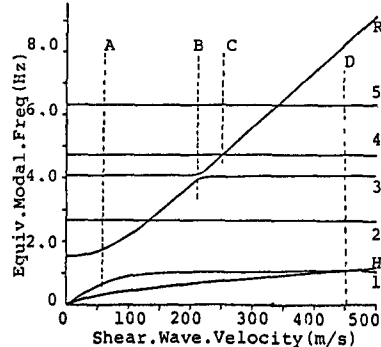


図4 等価減衰定数曲線



は上部構造物と基礎のロッキングが、連成をおこし、Bでは基礎の水平振動と連成をおこしているためである。

次に、上部構造物を5自由度系にして同様な解析を行った。図3は各質点間の高さを一定にして、最下質点と各質点との重量比を一定に保ち、最下質点の重量(W)を変化させたときの振動数曲線である。図中の右端の番号は上部構造物の1~5次までの振動モードを表わしている。また、Rで示される斜上方へ伸びる線は基礎のロッキングが卓越するモードを、Hで示される曲線は基礎の水平振動の卓越するモードにおける振動数を表わしている。重量が増加すると、基礎の水平振動に対する振動数は下降すること、上部構造物の1次の振動モードと基礎のロッキングとが連成をおこす領域で、それぞれの曲線の離れ方が著しくなることがわかる。また、重量が増すとロッキングの振動モードは上部構造物の多数の振動モードとの間で連成を起すようになる。これは、上部構造物の重量が増してくると、上部構造の振動モードが基礎の振動に与える影響が大きくなり、広範囲の振動モードと連成するようになるためである。図4は、図3に対する減衰定数曲線である。図の右端の番号は、上部構造物の各次モードに対する減衰定数を示すものであり、 h_x は基礎の水平振動、 h_r はロッキングに対する減衰定数である。

3. 地盤-構造物系の近似固有値解析

これまで、複素固有値解析法を用いて振動解析を行ってきたが、以下では、上部構造物のみ非減衰固有値と固有モードを用いて、地盤-構造物系の等価固有振動数ならびに減衰定数を決定するための近似理論を展開し、厳密解との比較を行う。解析は摂動法を用いたものであり³⁾、基礎の質量が、上部構造物各節点に分布する質量に比べ、比較的大きいという仮定に基づいている。ここでは、簡単のために基礎は水平振動のみを行うものとし、ロッキング振動との連成を考慮しなければ、固有方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} [k] & \{0\} \\ \{0\}^T & K_{xx} \end{bmatrix} \Phi_i^* = \omega_i^{*2} \begin{bmatrix} [m] & \{m\} \\ \{m\}^T & M_b \end{bmatrix} \Phi_i^* \quad (3) \quad \Phi_i^* = \{\phi_{1,i}^*, \dots, \phi_{n,i}^* \mid \phi_{n+1,i}^*\}^T \\ = \{\Phi_i \mid \phi_{n+1,i}^*\}^T$$

ここに、 ω_i^* は固有値、 Φ_i^* は固有モードである。式(3)を基礎と上部構造物に分解すると、

$$\begin{aligned} [k] \Phi_i &= \omega_i^{*2} [m] \Phi_i + \omega_i^{*2} \{m\} \phi_{n+1,i}^*, \\ M_b \omega_b^2 \phi_{n+1,i}^* &= \omega_i^{*2} \{m\}^T \Phi_i + \omega_i^{*2} M_b \phi_{n+1,i}^* \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)の第2式から、 $\phi_{n+1,i}^*$ と Φ_i の関係が次式で与えられる。

$$(\omega_b^2 - \omega_i^{*2}) \phi_{n+1,i}^* = \omega_i^{*2} \{r\}^T \Phi_i, \quad \{r\}^T = \{m\}^T / M_b \quad (5)$$

式(5)を式(4)の第1式に代入すると次式を得る。

$$[k] \Phi_i = \omega_i^{*2} [m] \Phi_i + \omega_i^{*4} / (\omega_b^2 - \omega_i^{*2}) \{m\} \{r\}^T \Phi_i \quad (6)$$

以上の式中、添字*の付いた変量は、基礎も含めた構造系の変量を表わしており、添字のない変量は、上部構造物だけを考えた場合の変量である。式(6)の右辺第2項は、 $M_b \gg 1$ であるので $\{r\}^T$ の要素は小さいと考えられる。したがって $\Phi_i = \{\phi_{1,i}^*, \dots, \phi_{n,i}^*\}$ から基礎の並進運動に関する振幅 $\phi_{n+1,i}^*$ を差し引いた値は、上部構造物の非減衰固有モード $Q_i = \{q_{1,i}, \dots, q_{n,i}\}^T$ から少し変化しているだけである。したがって、 Φ_i の第1近似として次式を採用する。

$$\Phi_i = Q_i + \{1\} \phi_{n+1,i}^* \quad (7)$$

式(6)は次のように書き換えられる。

$$[k] Q_i = \omega_i^{*2} [m] Q_i + \omega_i^{*2} (\omega_i^{*2} \{[m] \{1\} + \{m\} - [k] \{1\}\} \{m\} \{r\}^T Q_i / (\omega_b^2 - (1+\beta) \omega_i^{*2})) \quad (8)$$

ここに、 $\beta = \{m\}^T \{1\} / M_b$ である。式(8)の両辺に右から Q_i^T を乗ずると、モードの直交性を利用して次式を得る。

$$\omega_i^2 M_i = \omega_i^{*2} M_i + \omega_i^{*4} / (\omega_b^2 - (1+\beta) \omega_i^{*2}) A_i - \omega_i^{*2} / (\omega_b^2 - (1+\beta) \omega_i^{*2}) B_i \quad (9)$$

$$M_i = \sum_{j=1}^n m_{j,i} \phi_{j,i}^2, \quad \{A\} = Q_i^T \{[m] \{1\} + \{m\} - [k] \{1\}\} \{r\}^T Q_i, \quad \{B\} = Q_i^T [K] \{1\} Q_i$$

式(9)を解くことにより ω_i^* が求まる。一担、 ω_i^* が決まると式(5)で $\Phi_i = Q_i + \{1\} \phi_{n+1,i}^*$ において $\phi_{n+1,i}^*$ を決定することができる。 Φ_i^* が求められると、第(n+1)番目のモード形状は、 $\Phi_i^* (i=1, \dots, n)$ に対する直交性の条件から導ける。

また、減衰定数 h_i^* に対する近似解は次式から決定される。

$$\Phi_i^{*T} C^* \Phi_i^* = 2h_i^* \omega_i^* M_i^* \quad (10)$$

ここに、
$$C^* = \begin{bmatrix} [c] & \{0\} \\ \{0\}^T & C_{xx} \end{bmatrix}, \quad M^* = \begin{bmatrix} [m] & \{m\} \\ \{m\}^T & M_b \end{bmatrix}, \quad M_{11}^* = \Phi_{11}^{*T} M^* \Phi_{11}^*$$

 地盤の等価減衰係数; $C_{xx} = 2h_b \omega_b M_b$

式(10)に、上で求まる Φ_{11}^* を代入すれば、 h_{11}^* が得られる。

2. の解析に用いたのと同じ基礎の形状寸法を使用し、最下質点の重量を100tとおき、2. と同様にして等価固有振動数曲線と等価減衰定数曲線を求めた。図5は、近似解法で求めた振動数特性であり、図6は、厳密解によるものである。比較してみると、上部構造物だけの固有振動数と基礎だけの固有振動数が交わるところで、図(a)も図(b)もかなりの誤差を生じたこれは、 $\omega_1 = \omega_b$ なる所では、 ω_1^* に対する解の任意性が発生するためである。他の V_s のところではほぼ一致した。

4. 結論

以上、基礎との連成を考えた多自由度構造物の振動特性について詳細な考慮を加えた。上部構造物の重量を増すと基礎の水平振動モードの卓越する

振動数は低くなり減衰定数は小さくなること、さらに重量が大きくなると基礎の振動モードは上部構造物の広範囲の振動モードと連成をおこすようになることが判明した。次に、上部構造物だけの非減衰固有値とモードから厳密解を近似する式を誘導した。基礎の振動モードと上部構造物の振動モードが一致する領域近傍では近似解と厳密解との誤差が大きくなる。特に減衰定数についてはその著しいことがわかった。

<参考文献>

- 1) Veletsos, A.S. and Y.T. Wei ; Lateral and Rocking Vibration of Footing ,Proc.ASCE ,Vol.97 ,SM9 pp.1227-1249 ,1971.
- 2) 山田善一・後藤洋三 ; 長大つり橋主塔橋脚の振動特性と地震応答解析に関する諸考察 , 土木学会論文報告集 , No.207 , pp.1-12 , 1972.
- 3) Sackman, J. L., Der Kiureghian, A. and Nour-Omid, B. ; Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Modal Properties of the Combined System, Proc.ASCE, Vol.109, EM1, pp.73-89, 1983.

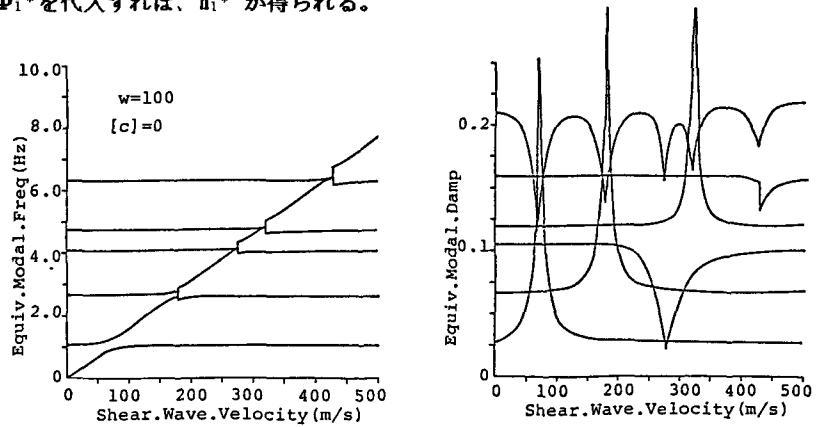


図5 (a) 等価固有振動数曲線

(b) 等価減衰定数曲線

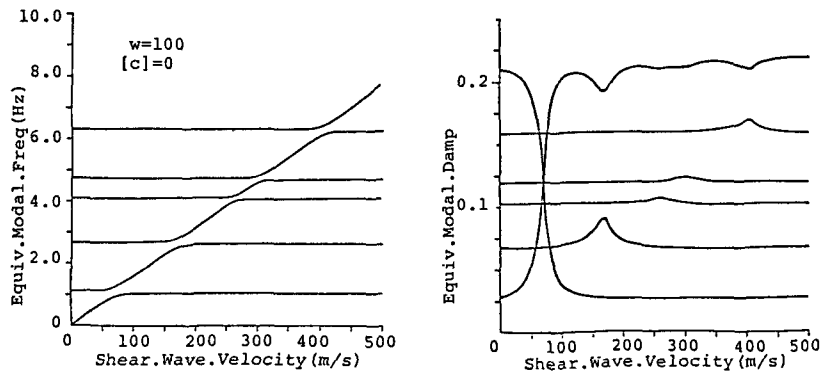


図6 (a) 等価固有振動数曲線

(b) 等価減衰定数曲線