

(40) EK-WGI法による構造物の動特性推定法の定式化

(方法-2および方法-3)

武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

武蔵工業大学 学生員 ○丸山 収

1. はじめに

構造物に対する入力とその応答の観測データを用いて、動特性値を算定する手法として、著者らは、拡張カルマンフィルタアルゴリズム¹に重み付きグローバルな繰返しを併用したEK-WGI法^{2,3}を提案している。そして、線形多自由度系に対して、モーダル解析法を用いて拡張カルマンフィルタの状態方程式および観測方程式を定式化することの有効性を発表した(方法-1)³。

本研究では、問題に応じていろいろの定式化が望ましいことから、新たに次の2つの方法、(i)方法-2: 構造物の時間領域の応答に対する離散型漸化式⁴を誘導し、それを状態方程式および観測方程式へと定式化する方法、(ii)方法-3: 周波数領域の応答を観測データとして用いて、観測方程式にはフーリエ変換された基本振動方程式を用い、状態方程式は同定すべきパラメータを持つ定常状態方程式として定式化する方法について検討を行う。

2. 離散型漸化式による定式化

(i) 離散型漸化式の誘導: 線形多自由度系でモデル化された構造物の*i*質点での運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (a) \quad & \ddot{\xi}_{ik}(t) + 2\beta_k \omega_k \dot{\xi}_{ik}(t) + \omega_k^2 \xi_{ik}(t) = -P_{ik} \ddot{f}(t) \\ (b) \quad & \xi_i(t) = \sum_k \xi_{ik}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 β_k : *k*次振動モードの減衰定数、 ω_k : *k*次の固有円振動数、 P_{ik} : *i*質点の*k*次の刺激係数次に(1-a)式を(2)式を用いてラプラス変換すると、 $-P_{ik} \ddot{f}(t)$ を入力として応答を変位とした場合の伝達関数は(3)式となる。

$$\bar{\xi}_{ik}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{ik}(t) e^{-st} dt \quad (2) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\beta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3)$$

さらに、(3)式から(4)式を得る。

$$H(s) = \frac{1}{2i\bar{\omega}} \left[\frac{1}{s + (a - i\bar{\omega})} - \frac{1}{s + (a + i\bar{\omega})} \right] \quad (4) \quad \text{ここで } a = \beta_k \omega_k, \bar{\omega} = \sqrt{1 - \beta_k^2} \omega_k$$

(5)式に示すラプラス変換とZ変換の関係式⁴から、Z変換域での伝達関数は(6)式で与えられる。

$$H(s) = \sum_j \frac{A_j}{s + s_j} \rightarrow H(z) = \sum_j \frac{1}{1 - e^{s_j \Delta} z^{-1}} \quad (5) \quad H(z) = \frac{\frac{e^{-a\Delta}}{\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}\Delta)}{1 - 2e^{-a\Delta} \cos(\bar{\omega}\Delta) z^{-1} + e^{-2a\Delta} z^{-2}} \quad (6)$$

Δ : 時間刻み

(6)式から変位応答に対する離散型漸化式が得られる。この式を直接用いて得られた漸化式から応答の時刻歴を計算すると実際の振幅に対して $\frac{1}{\Delta}$ 倍されたものとなり、次に示す(7), (8), (9)式においては、離散化された入力項 $\ddot{f}(t)$ の項を Δ 倍してある。変位、速度および加速度応答に対する離散型漸化式^{4,5}を次に示す。

$$(\text{変位}) \quad \xi_{ik}(M) = 2e^{-a\Delta} \cos(\Delta\bar{\omega}) \xi_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \xi_{ik}(M-2) - \frac{\Delta P_{ik}}{\bar{\omega}} e^{-a\Delta} \sin(\Delta\bar{\omega}) \ddot{f}(M-1) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{(速度)} \quad \dot{\xi}_{ik}(M) = & 2e^{-a\Delta} \cos(\Delta\bar{\omega}) \dot{\xi}_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \ddot{\xi}_{ik}(M-2) \\ & - \Delta p_{ik} \ddot{f}(M) + e^{-a\Delta} \left[\cos(\Delta\bar{\omega}) + \frac{\beta_k}{\beta} \sin(\Delta\bar{\omega}) \right] \Delta p_{ik} \ddot{f}(M-1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{(加速度)} \quad \ddot{\xi}_{ik}(M) = & 2e^{-a\Delta} \cos(\Delta\bar{\omega}) \ddot{\xi}_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \ddot{\xi}_{ik}(M-2) \\ & - \Delta(2a-1) \ddot{f}(M) - e^{-a\Delta} \left[2(a-1) \cos(\Delta\bar{\omega}) - \frac{\omega_{ik}(1-2\beta_k^2)}{\beta} \sin(\Delta\bar{\omega}) \right] \Delta \ddot{f}(M-1) - 2e^{-2a\Delta} \ddot{f}(M-2) \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) 状態方程式および観測方程式の定式化

ここでは変位応答1波を観測データとした場合の定式化を示す。 k 次振動モードを、 $X_1 = \xi_{ik}(M)$, $X_2 = \dot{\xi}_{ik}(M-1)$, $X_3 = \ddot{\xi}_{ik}(M-2)$, $X_4 = \beta_k$ および $X_5 = \omega_k$ とおき、さらに $X_6 = p_{ik}$ と状態空間表示すれば、(7)式より、(10)式に示す非線形離散型状態方程式が得られる。また、 n 次振動モードまで考慮した多自由度系に状態方程式を拡張する場合には、(11)式のように各モードごとの状態方程式を単純に重ね合わせていけば良い。(10)式に対応する観測方程式を(12)式に示す。

$$\mathbf{y}_{Mk} = \begin{bmatrix} X_1(M) \\ X_2(M) \\ X_3(M) \\ X_4(M) \\ X_5(M) \\ X_6(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-a\Delta} \cos(\Delta b) X_1(M-1) - e^{-2a\Delta} X_2(M-1) - \frac{\Delta X_6(M-1)}{b} e^{-a\Delta} \sin(\Delta b) \ddot{f}(M-1) \\ X_1(M-1) \\ X_2(M-1) \\ X_4(M-1) \\ X_5(M-1) \\ X_6(M-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ \text{(noise)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \therefore & a = X_4(M-1) X_5(M-1) \Delta \\ & b = \sqrt{1 - X_4^2(M-1)} X_5(M-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_M^T = [\mathbf{y}_{M1}^T, \mathbf{y}_{M2}^T, \mathbf{y}_{M3}^T, \dots, \mathbf{y}_{Mn}^T] + \mathbf{v}_{\text{(noise)}} \quad (11) \quad \xi_{ik}(M) = [1, 0, 0, 0, 0, 0] \mathbf{y}_{Mk}^T + \mathbf{v}_{\text{(noise)}} \quad (12)$$

観測データとして、速度および加速度応答波形を用いる場合にも同様の定式化が可能である。方法-1に比べ簡単な定式化となっており、計算時間も短縮されるものと思われる。

(3) 周波数領域の観測データを用いる場合の定式化 (方法-3)

(i) 状態方程式および観測方程式の定式化

(1)式を(13)式を用いてフーリエ変換すると、変位、速度および加速度に対して(14)式を得る。

$$\overline{\xi}_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{ik}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{(変位)} \quad \overline{\xi}_{ik}(\omega) = & \frac{-p_{ik} \overline{\ddot{f}}(\omega)}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\beta_k \omega_k \omega} \quad \text{(速度)} \quad \overline{\dot{\xi}}_{ik}(\omega) = i\omega \overline{\xi}_{ik}(\omega) \quad \text{(加速度)} \quad \overline{\ddot{\xi}}_{ik}(\omega) = (\omega^2)^2 \overline{\xi}_{ik}(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

周波数領域のデータが時間領域のものと対等な情報を持つためには、その実数部 ($\text{Re}[\cdot]$) と虚数部 ($\text{Im}[\cdot]$) が別々にわかっていなければならない⁶。例えば、変位のフーリエ変換では、分母を有理化することにより次式を得る。

$$\text{Re}[\overline{\xi}_{ik}(\omega)] = \frac{-p_{ik}(\omega_k^2 - \omega^2) \text{Re}[\overline{\ddot{f}}(\omega)] - 2p_{ik}\beta_k \omega_k \omega \text{Im}[\overline{\ddot{f}}(\omega)]}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k \omega_k \omega)^2} \quad (15)$$

$$\text{Im}[\bar{\epsilon}_{ik}(\omega)] = \frac{2p_{ik}\beta_k\omega_k\omega\text{Re}[\bar{f}(\omega)] - p_{ik}(\omega_k^2 - \omega^2)\text{Im}[\bar{f}(\omega)]}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k\omega_k\omega)^2} \quad (16)$$

ここでは、観測方程式を非線形とする場合の定式化について述べる。まず、 k 次振動モードを、 $X_1 = \beta_k$, $X_2 = \omega_k$ および $X_3 = p_{ik}$ と状態空間表示すると状態方程式は (17) 式となる。そして、(15) 式および (16) 式を状態量を用いて表すことで (18) 式の非線形離散型観測方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} X_1(M) \\ X_2(M) \\ X_3(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(M-1) \\ X_2(M-1) \\ X_3(M-1) \end{bmatrix} + V \quad (17)$$

(noise)

$$\begin{bmatrix} R_e[\bar{\epsilon}_{ik}(K)] \\ I_m[\bar{\epsilon}_{ik}(K)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-X_3(M)(X_2(M) - K^2)\text{Re}[\bar{f}(K)] - 2X_3(M)X_1(M)X_2(M)K I_m[\bar{f}(K)]}{(X_2(M) - K^2)^2 + (2X_1(M)X_2(M)K)^2} \\ \frac{2X_3(M)X_1(M)X_2(M)K\text{Re}[\bar{f}(K)] - X_3(M)(X_2(M) - K^2) I_m[\bar{f}(K)]}{(X_2(M) - K^2)^2 + (2X_1(M)X_2(M)K)^2} \end{bmatrix} + W \quad (18)$$

(noise)

($K = M \cdot \Delta\omega$ $M = 1, 2, 3, \dots$)

また、(14) 式の関係から、速度および加速度応答に対しても容易に定式化することができる。

一般に振動試験からは、時間領域のデータが観測されるので、方法-1および方法-2の様に、直接時間領域で処理する解析手法が妥当であると思われる。しかし、時間領域のデータをフーリエ変換することは、時刻歴に含まれる振動数成分の検出と時間領域から周波数領域への変換が行なわれること⁶であり、従来から広く用いられているスペクトル解析法は、振動数成分が検出されることを利用した解析法である。方法-3の考え方の基本は、周波数領域に変換されたデータにおいても、その実数部および虚数部の合わせ持つ情報は、時間領域のデータと等しいということに注目して定式化していることである。(18) 式の観測方程式で応答のフーリエ変換の実数部および虚数部は、それぞれ入力⁷のフーリエ変換の実数部および虚数部を別々に取り込む形の定式化となっている。この際、入力および応答のフーリエ変換は、スムージングなどの処理をせずに用いる。

方法-3では、振動数成分が検出されるため、図-2に示すように卓越振動数の範囲が明瞭になる場合には、その周波数帯域に限定したデータだけを用いて同定しても各次モードの固有円振動数 ω_k および減衰定数 β_k が推定できる。また、適応型の同定であるから、EK-WGI法では、周波数領域のデータを順次処理していく。

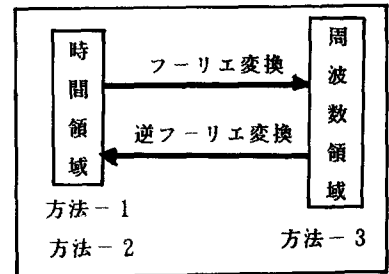


図-1. 方法1, 2と方法3の関係

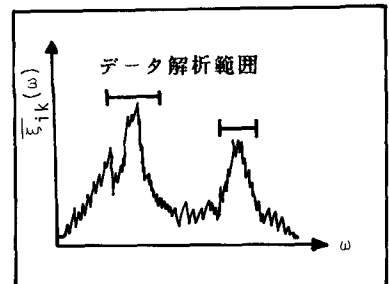


図-2. 応答スペクトル

周波数領域にデータを変換する際に、Nyquist 振動数などの問題があるが、データを時間刻みごとに解析する方法に比べて的がしばれ処理データ数が少くても良いので有効な方法であると思われる。

4. おわりに

EK-WGI 法による構造物の動特性推定に関して、新たに方法-2 および方法-3 について述べた。解析に際しては、

- ・時間領域の解析手法 ----- 方法-1 および方法-2
- ・周波数領域の解析手法 ----- 方法-3

のそれぞれの特徴を考え最適な手法を選択、併用していくことが必要であると思われる。なお、数値解析例については講演の際に示すこととする。

- 参考文献：1. Jazwinski A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970
2. M. Hoshiya and E. Saito: Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984
3. 星谷, 斎藤: 線形多自由度系の動特性推定, 土論集, No. 344/I-1 1984.4
4. Verbic, B.: Application of Discrete Fourier Transform and Recursive Equations for Seismology, Publication No. 60, Skopje, Yugoslavia, 1978
5. J. L. Beck and H. Park: Optimal Algorithms for Calculating the Response of Linear Oscillators to Digitized Ground Accelerations
EIGHTH WORLD CONFERENCE on EARTHQUAKE ENGINEERING, Vol. 4, July, 1984
6. 大崎: 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会
7. Graeme H. Mcverry: Structural identification in the frequency domain from earthquake records, Earthquake Engineering and structural Dynamics, vol: 8, 1980