# (32) ２層粘弾性地盤におけるラブ波の特性をもつ振動モード

東京工業大学大学院総合理工学研究科　正　大町　達夫
同　学　○年縄　巧

## 1．はじめに

粘弾性地盤を伝播する表面波の減衰に関する研究はこれまで多くの研究者によってなされている。[1] しかしながら弾性体では容易に解けた問題が粘弾性体では急激に複雑になり、一般的な取り扱いは非常に困難となる。ところで土木工学の分野では振動解析の技術は現在相当高いレベルにあるので振動と波動の等値性を利用して、波動問題を振動問題として解くことを考えれば、複雑な問題も比較的容易に解き得るものと思われる。[2] ここではその一例を粘弾性地盤内のラブ波について示すことにする。

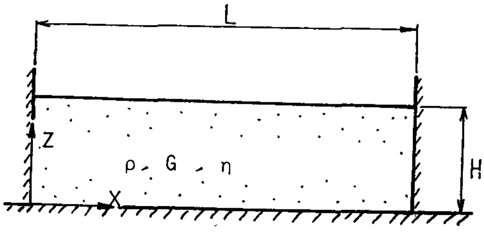


図１

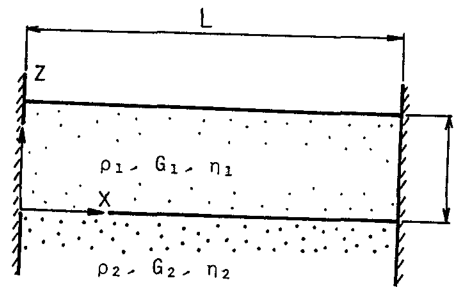


図２

## 2．下層が剛な２層粘弾性地盤

三方を剛な壁と床に囲まれた図１のような水平で均質な地盤を考え、媒質はVoigt 型粘弾性体とする。密度を$\rho$、せん断剛性をG、粘性係数を$\eta$で表わし、y方向（紙面に垂直）の変位のみを許すとき、２次元的なせん断振動の運動方程式は

$$\rho V_{tt} = G\,(V_{xx} + V_{zz}) + \eta\,(V_{xxt} + V_{zzt}) \qquad (1)$$

となる。この式は、下層が剛な２層粘弾性地盤を伝播するラブ波の方程式と同一である。図１の地盤振動の境界条件は x=0,L及び z=0でV=0 、z=HでV'=0である。これを満たす解として次のような変数分離形の解が存在する。

$$V(x,z,t) = a\ \sin kx\ \sin sz\ \ e^{i\omega^* t} \qquad (2)$$

但し、　$k=n\pi/L$ n=1,2,... 、 $s=(2m+1)\pi/2H$ m=0,1,2...

(2) を(1) に代入して、$Q=G/\eta\,\omega_0$を用いて$\omega^*$を求めれば、

$$i\omega^* t = -\omega_0 t/2Q + i\,\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}\,t \qquad (3)$$

となるが、更にhとQの関係(h=1/2Q)を用いれば、(3) は次のように粘性減衰をもつ１自由度系の固有振動数と同じ形式で表わされる。

$$i\omega^* t = -h\,\omega_0 t + i\,\omega_0\sqrt{1-h^2}\,t = -h\,\omega_0 t + i\,\omega_D t \qquad (4)$$

但し、$\omega_0$はこの系の無減衰時の固有円振動数である。

図１に示す有限長の地盤の場合には$\omega_D$は離散値となるが、これらの離散値から位相速度を求め、波長や周期に対してプロットすれば同一の層構造を伝播するラブ波の分散曲線上にのる。（4）を用いて、(2) を書き

換えれば、

$$V(x,z,t) = a\ \sin kx\ \sin sz\ e^{-h\omega_0 t}\ e^{i\omega_D t} \quad (5)$$

となり、m、nに対し、総和をとったものが、この地盤の振動変位を与える。 要するに、図１に示す粘弾性地盤のせん断振動の解を用いればこの地盤を伝播するラブ波の振動モードが直ちに得られることが明らかになった。

## ３． 下層が剛でない２層粘弾性地盤

図２のように下層が剛でない地盤構造を考える時、上層、下層をあらわすためにそれぞれ添字1,2 をつければ、運動方程式は次のようになる。

$$\rho_1 V_{1}tt = G_1(V_1xx + V_1zz) + \eta_1(V_1xxt + V_1zzt) \quad (6)$$
$$\rho_2 V_{2}tt = G_2(V_2xx + V_2zz) + \eta_2(V_2xxt + V_2zzt) \quad (7)$$

境界条件は $x=0,L$ で $V_1=V_2=0$、$z=0$ で $V_1=V_2$、$V_1'=V_2'$ 及び、$z=H$ で $V_1'=0$ であり、これらの運動方程式の解は一般に非常に複雑である。 一方、質点系の振動学において減衰がRayleigh Dampingの場合には、固有モードは非減衰系のものと一致し取り扱いは極めて簡単になる。 そこで、$\eta_1=\alpha\rho_1+\beta G_1$、$\eta_2=\alpha\rho_2+\beta G_2$ とおき２層完全弾性地盤のラブ波の固有関数を用いて

$$V(x,z,t) = a\ \sin kx\ \cos\zeta_1(z-H)\ e^{i\omega^* t} \quad (8)$$
$$V(x,z,t) = a\ \sin\zeta_1 H\ \cos kx\ e^{\zeta_2 z}\ e^{i\omega^* t} \quad (9)$$
$$\zeta_1=\sqrt{k_1^2-k^2}\ 、\quad \zeta_2=\sqrt{k^2-k_2^2} \qquad k_2(=\omega_0/V_2) < k(=n\pi/L) < k_1(=\omega_0/V_1)$$

と表わすとき、これらが(6),(7) の解となるためには $\alpha=0$ あるいは $V_1=V_2$ が必要である。 $V_1=V_2$ という条件は現実性に乏しいので、$\eta_1=\beta G_1$、$\eta_2=\beta G_2$ を採用することとすれば、(8),(9) の $i\omega^* t$ は無減衰時の固有円振動数 $\omega_0$ を用いて

$$i\omega^* t = -h\omega_0 t + i\omega_0\sqrt{1-h^2}\,t = -h\omega_0 t + i\omega_D t \quad (10)$$
$$h = \eta_1\omega_0/2G_1 = \eta_2\omega_0/2G_2$$

と表わせる。 これは下層が剛な場合と同様に一質点系と類似の減衰振動をあらわしている。 (10)でhが高々$10^{-1}$（Q値が50）程度のオーダーであることを考えれば、$\omega_D \fallingdotseq \omega_0$ であるので 2.の結果とも合わせて「粘弾性地盤内における位相速度 $C_D$ は完全弾性体内における位相速度 $C_0$ とほぼ等しい[3]」という周知の結果に帰着する。

## ４． ２層粘弾性地盤の単位衝撃応答

３．で $\eta_1/G_1=\eta_2/G_2$ を仮定すれば２層粘弾性体中のラブ波を簡単な振動問題としてとらえることができるとわかったので地盤内のある点に単位衝撃を与えた時の任意の点での応答を調べてみる。 地盤内の点$(x,z)$ にy方向の外力$f(x,z,t)$が作用したときの運動方程式は

$$\rho(z)\ Vtt = G(z)\ (Vxx + Vzz) + \eta(z)\ (Vxxt + Vzzt) + f(x,z,t) \quad (11)$$

であり、地盤定数を

$$\rho(z)=\begin{cases}\rho_1 & (0\leqq z\leqq H)\\ \rho_2 & (z<0)\end{cases}\quad、\quad G(z)=\begin{cases}G_1 & (0\leqq z\leqq H)\\ G_2 & (z<0)\end{cases}$$

$$\eta(z)=\beta G(z)$$

のように定めると地盤内の任意の点(x,z) における応答変位は振動学におけるモード重合わせ法の要領から、

$$V(x,z,t)=\sum_m\sum_n U_n(x)W_m(z)Q_{mn}(t) \qquad (12)$$

ここで $U_n(x)=\sin kx$ 、 $W_m(z)=\begin{cases}\cos\zeta_1(z-H) & (0\leqq z\leqq H)\\ \cos\zeta_1 H\exp(\zeta_2 z) & (z<0)\end{cases}$

この解を(11)に代入し、両辺に $G(z)\ U_n(x)W_m(z)$ を乗じ、 $0\leqq x\leqq L,\ -\infty\leqq z\leqq H$ で積分すれば、

$$\ddot{Q}_{mn}(t)+2h\omega_0\dot{Q}_{mn}(t)+\omega_0^2 Q_{mn}(t)=F_{mn}(t)/M_{mn} \qquad (13)$$

但し $F_{mn}(t)=\int_{-\infty}^{H}\int_0^L\{G(z)/\rho(z)\}\ U_n(x)W_m(z)\ f(x,z,t)\,dx\,dz$

$M_{mn}=\int_{-\infty}^{H}\int_0^L G(z)\ U_n^2(x)W_m^2(z)\,dx\,dz$

更に外力を $f(x,z,t)=\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\delta(t)$ として単位衝撃力を与えてやれば一質点系の単位衝撃応答と同様に考えて

$$Q_{mn}(t)=\{4A_L/\rho HL\omega_D\}\sin kx_0\ \cos\zeta_1(z_0-H)\ e^{-h\omega_0 t}\sin\omega_D t \qquad (14)$$

$$A_L=(\zeta_1/G_1)\tan\zeta_1 H/\{(G_2/G_1)^2\cos^2\zeta_1 H+\zeta_1 H\tan\zeta_1 H+\sin^2\zeta_1 H\}$$

ここで $A_L$ は地盤の層構造のみから決まる量であり、medium response と呼ばれることがある。 このmedium response に上層のせん断剛性 $G_1$ と層厚Hを乗じて無次元化した量をmedium response factorと呼ぶことににしてこれと周期との関係を表わすと図3のようになる。 但し、周期は上層のS波速度と層厚の比 $V_1$/H を乗じて無次元化している。 また $A_L$ を円振動数 $\omega_D$ で除した値は各モード間の応答変位振幅比を決定する量といえる。 そこでこの値に $G_1$ と $V_1$ を乗じて無次元化した量をmodal response factor と呼ぶことにし、この値を無次元化周期 T $V_1$/Hに対しプロットすると図4のようになる。

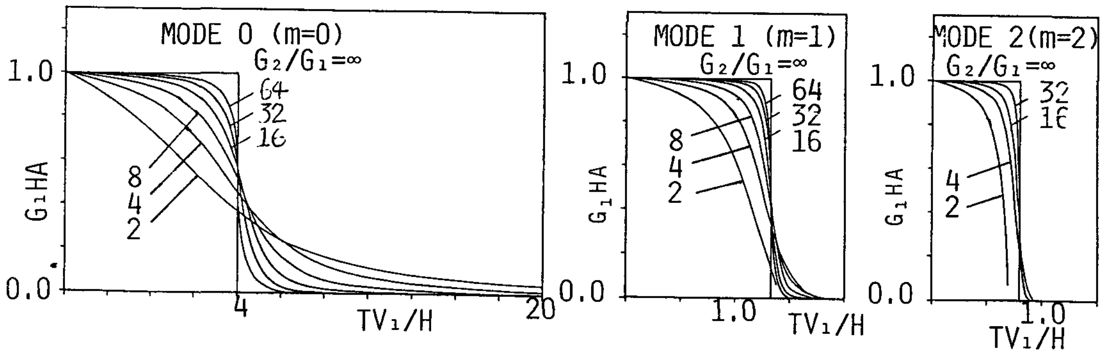


図3

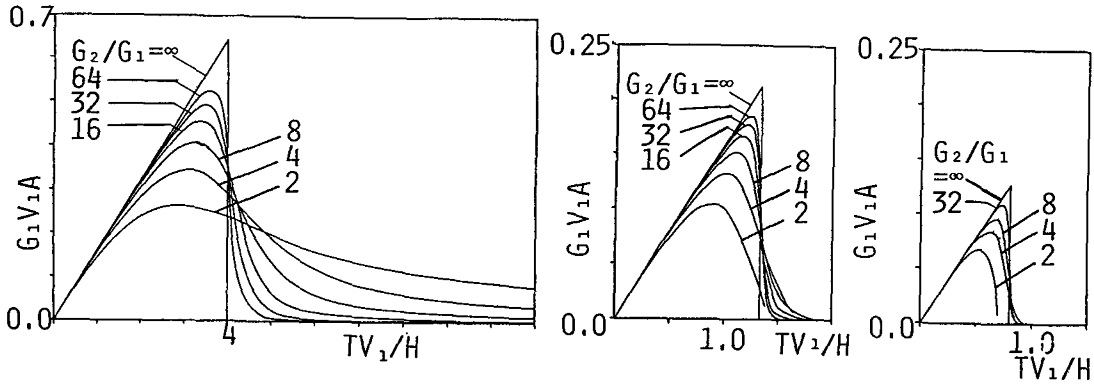


図4

これらを見てわかることは、

- ラブ波の各モードの最大スペクトル振幅は剛比$G_2/G_1$の増加につれて大きくなる。
- 上下層の剛比が有限であればLove波のスペクトルは単峰性のピークを示す。
- 基本モードで$G_2/G_1=\infty$の場合、$TV_1/H=4$ の周期成分の振幅が最大となるいわゆる1/4 波長則が成立するが剛比が小さくなるにつれてスペクトルのピークの周期は短くなる。
- 図4では基本モードにモードの次数が増えるに従って振幅がほぼ1/3,1/5,... となっていく。
- $\omega_b \fallingdotseq \omega_0$であることから粘弾性体のmodal response factor は位相速度と同様に完全弾性体のmodal response factor にほぼ等しいということがわかる。
- これらのことは、粘弾性地盤内の応答は弾性地盤内の応答値にただ時間的な減衰を考慮するだけで拡張することができるという当然ではあるが有益な結果を示している。

## 5. おわりに

下層が剛な２層粘弾性地盤の場合には無条件に、また下層が剛でない場合でも$\eta_1/G_1=\eta_2/G_2$を仮定してやればラブ波による一質点系と同様な減衰振動に帰着することがわかった。 また地盤内のある点を単位衝撃加振した場合の任意の点の変位も周知の振動学的手法によって簡単に求めることができ、これらの結果からラブ波の性質を定量的に評価することができることがわかった。

## 6. 参考文献

1) L.Knopoff:Q,J.G.R,Vol.2,No.4,1964,pp.625-660

2) S.Morichi,T.Ohmachi and T.Toshinawa:Vibration Modes Characterized by Love Waves in an Elastic Layer Overlying a Rigid Basement,Proc. of JSCE Structual Eng./Earthquake Eng. Vol.2,No.1, 1985,pp.227-235

3) 平沢、佐藤：分散性表面波の減衰の定数（Q）、地震 2,16,1963,PP.87-100