(30) 三次元半無限一様弾性地盤の非定常振動解（内部点加振を受ける場合）

佐藤工業（株）　中沢裕文　　工学院大学　望月　洵

1．はじめに

構造物の耐震設計を行う場合、構造物・地盤の動的相互作用の考慮、すなわち上部構造の振動特性や地盤の動特性、入力地震波等の相互関係の把握が必要であることが指摘されきた。一方、最近の研究では、構造物の耐震安全性の評価においても断層、特に活断層による地震の発生から、地震波の構造物への伝播までを考える必要もあるといわれている[1]。このように震源から構造物までを全体系として捉らえることも必要であるが、局所的に追及をするのも不可欠な手段であり、この全体系は大別すると次の三つに分けられる[2]。

1）震源（断層）における地震の発生から伝播経路を経て基盤までの領域

2）基盤から地盤の成層構造を経て地表面までの領域

3）基盤または地表面を介しての地震動に対する構造物までの領域

ところで、現在までに明らかになっている地震のメカニズムからみて、地盤震動は三次元で考慮しなければならない[3]。また、地震の発生までを考慮するならば内部加振源の性状および、地盤内の波動伝播特性を把握する必要がある。

そこで、本研究は上記の1),2) を対象にして内部加振源による波動伝播特性について加振源モデルの検討、すなわち、点加振、線・面加振、および断層モデル等の数理的取扱い、さらに表層地盤の形状・成層効果、並び動特性等の検討を行おうとするものである。本報告は既報[4)-6)]の二次元の場合を三次元へ拡張し、三次元半無限一様弾性地盤の内部点加振源に対する変位解を求めた[7),8)]。

2．基礎方程式とその積分変換

この問題は次のように各条件の下で内部加振力を非同次項とする三次元波動方程式（Navier方程式、動的Lamé方程式）を解く混合境界値問題に帰着される。

■基礎方程式

$$\mu\Box u+(\lambda+\mu)E_{,x}+X=0$$
$$\mu\Box v+(\lambda+\mu)E_{,y}+Y=0$$
$$\mu\Box w+(\lambda+\mu)E_{,z}+Z=0 \qquad ---(1)$$

ここで、D'Alembertian $\Box=\Delta-c_2^{-2}(\cdot)_{,t}$

Laplacian　$\Delta=(\cdot)_{,x}+(\cdot)_{,y}+(\cdot)_{,z}$

$c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$, $\lambda=2\nu\mu/(1-2\nu)$

$E=u_{,x}+v_{,y}+w_{,z}$

c_2：横波速度，　λ, μ：Lame定数，

ν　：Poisson 比，　ρ：単位体積重量

■境界・正則性条件

$$z=0:\quad \mu(w_{,x}+u_{,z})=0$$
$$\mu(w_{,y}+v_{,z})=0$$
$$(\lambda+2\mu)w_{,z}+\lambda(u_{,x}+v_{,y})=0$$
$$z\to\infty:\quad u=0,\ v=0,\ w=0 \qquad ---(2)$$

■初期条件

$$u(x,y,z;t=0)=u_0(x,y,z)=0,\ \cdots,$$
$$\dot{u}(x,y,z;t=0)=\dot{u}_0(x,y,z)=0,\ \cdots, \qquad ---(3)$$

そこで、この基礎方程式、境界・正則性条件を Fourier・Laplace 変換して、まず像空間の解を得、次に、Cagniardの方法[11)]を用いて逆変換し実空間の解を求める。基礎方程式(1) の変換は次式となる。

$$\mu U_{,zz}-(\lambda+\mu)\alpha(\alpha U+\beta V+iW_{,z})-\{\mu(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}U+P_x=0$$
$$\mu V_{,zz}-(\lambda+\mu)\beta(\alpha U+\beta V+iW_{,z})-\{\mu(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}V+P_y=0$$
$$\mu W_{,zz}-(\lambda+\mu)(i\alpha U+i\beta V-W_{,z})_{,z}-\{\mu(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}W+P_z=0 \qquad ---(4)$$

ここで、$U=L[F[u]]$, $P_x=L[F[X]]$等であり、L，F はそれぞれ Fourier, Laplace 変換を示す。

3．像空間の解

変位三成分のうち、鉛直変位wに対する像空間解Wを求める。式(4) からU、Vを消去すると、Wのzに関する非同次四階常微分方程式を得る。

$$\mu(\lambda+2\mu)W_{,zzzz}-\{2\mu(\lambda+2\mu)(\alpha^2+\beta^2)+(\lambda+3\mu)\rho p^2\}W_{,zz}$$
$$-\{\mu(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}\{(\lambda+2\mu)(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}W$$
$$=-i(\lambda+\mu)(\alpha P_x+\beta P_y)_{,z}+\{(\lambda+2\mu)(\alpha^2+\beta^2)+\rho p^2\}P_z-\mu P_{z,z} \quad ---(5)$$

9), 10)

ところで、超関数論によれば式(5) の非同次解（一般解）は同次解と素解の和に非同次項Rのzに関する合成積(convolution product) として示される。素解Gは式(5) で右辺項Rを$\delta(z)$ とした微分方程式の解で、ここでは次の同次解と素解Gを用いた。

$$W=Ae^{-r_1z}+Be^{-r_2z}+Ce^{r_1z}+De^{r_2z} \quad ---(6)$$

$$G=\frac{1}{2(r_1^2-r_2^2)}\left[-\frac{e^{-r_1z}}{r_1}+\frac{e^{-r_2z}}{r_2}+\frac{e^{r_1z}}{r_1}-\frac{e^{r_2z}}{r_2}\right] \quad ---(7)$$

$$r_1=(\alpha^2+\beta^2+p^2/c_1^2)^{1/2},\quad r_2=(\alpha^2+\beta^2+p^2/c_2^2)^{1/2}$$

ここで、θは Heaviside関数である。

一方、点加振力として内部点(x_0,y_0,z_0)に作用し、時間的に変化する三方向加振力を考え、次式で与える。

$$X(x,y,z;t)=X(t)\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$
$$Y(x,y,z;t)=Y(t)\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \quad ---(8)$$
$$Z(x,y,z;t)=Z(t)\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

ここで、X(t) 等は時間tのみの関数でδはDirac のデルタ関数である。これらを Fourier・Laplace 変換すると以下となる。

$$L[F[X]]=P_x=e^{(i\alpha x_0+i\beta y_0)}\,\delta(z-z_0)L[F[X(t)]]$$
$$L[F[Y]]=P_y=e^{(i\alpha x_0+i\beta y_0)}\,\delta(z-z_0)L[F[Y(t)]] \quad ---(9)$$
$$L[F[Z]]=P_z=e^{(i\alpha x_0+i\beta y_0)}\,\delta(z-z_0)L[F[Z(t)]]$$

式(9) の内部点加振力を式(5) に採用し、境界・正則性条件式(2) の Fourier・Laplace 変換したものを考慮すると像空間解Wは次のようにまとめられる。

$$W=(2\rho)^{-1}[\bar{I}_{x1}+\bar{I}_{x2}+\bar{I}_{x3}+\bar{I}_{x4}+(\bar{I}_{x5}+\bar{I}_{x6})\theta(z_0-z)+(\bar{I}_{x7}+\bar{I}_{x8})\theta(z-z_0)]\cdot L[X(t)]$$
$$+(2\rho)^{-1}[\bar{I}_{y1}+\bar{I}_{y2}+\bar{I}_{y3}+\bar{I}_{y4}+(\bar{I}_{y5}+\bar{I}_{y6})\theta(z_0-z)+(\bar{I}_{y7}+\bar{I}_{y8})\theta(z-z_0)]\cdot L[Y(t)]$$
$$+(2\rho)^{-1}[\bar{I}_{z1}+\bar{I}_{z2}+\bar{I}_{z3}+\bar{I}_{z4}+(\bar{I}_{z5}+\bar{I}_{z6})\theta(z_0-z)+(\bar{I}_{z7}+\bar{I}_{z8})\theta(z-z_0)]\cdot L[Z(t)]$$
$$---(10)$$

ここで、例えば、

$$\bar{I}_{x1}=-\frac{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2+4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2-4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}\,\frac{i\alpha}{p^2}\,e^{[-r_1(z+z_0)+i\alpha x_0+i\beta y_0]}$$

$$\bar{I}_{y1}=-\frac{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2+4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2-4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}\,\frac{i\beta}{p^2}\,e^{[-r_1(z+z_0)+i\alpha x_0+i\beta y_0]}$$

$$\bar{I}_{z1}=-\frac{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2+4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}{(\alpha^2+\beta^2+r_2^2)^2-4(\alpha^2+\beta^2)r_1r_2}\,\frac{r_1}{p^2}\,e^{[-r_1(z+z_0)+i\alpha x_0+i\beta y_0]}$$

となり、式(10)を Fourier・Lplace両逆変換することで実空間における解w(x,y,z;t) を得ることができる。

続いて、水平変位u，vに対する像空間解U，Vを求める。まず、U，Vそれぞれ独立な常微分方程式を先に導出した像空間解Wを用いて、式(4) より、誘導する。

$$[U_{,zz}-r_2^2 U+P_x/\mu]_{,z}=-i\alpha[W_{,zz}-r_2^2 W+P_z/\mu] \quad ---(11)$$
$$[V_{,zz}-r_2^2 V+P_y/\mu]_{,z}=-i\beta[W_{,zz}-r_2^2 W+P_z/\mu] \quad ---(12)$$
ところで、線形微分方程式(4) は個々の加振力に対して成立し、その解も個々の加振力のみの解となる。したがって、一般解は各加振力に対する解の和をもって表される。すなわち、各加振力に対する解をそれぞれ（U_x，U_y，U_z）等とすると、像空間解U，Vは次式で表される。

$$U=U_x+U_y+U_z \quad ---(13) \qquad V=V_x+V_y+V_z \quad ---(14)$$

また、$W_{(x,y,z)}$ との関係式(11),(12) や像空間の境界・正則性条件も各加振力ごとに分ける。

①$U_{(x,y,z)}$
$$\begin{aligned}&[U_{x,zz}-r_2^2 U_x+P_x/\mu]_{,z}=-i\alpha[W_{x,zz}-r_2^2 W_x]\\&[U_{y,zz}-r_2^2 U_y]_{,z}=-i\alpha[W_{y,zz}-r_2^2 W_y]\\&[U_{z,zz}-r_2^2 U_z]_{,z}=-i\alpha[W_{z,zz}-r_2^2 W_z+P_z/\mu]\end{aligned} \quad ---(15)$$

②$V_{(x,y,z)}$
$$\begin{aligned}&[V_{x,zz}-r_2^2 V_x]_{,z}=-i\beta[W_{x,zz}-r_2^2 W_x]\\&[V_{y,zz}-r_2^2 V_y+P_y/\mu]_{,z}=-i\beta[W_{y,zz}-r_2^2 W_y]\\&[V_{z,zz}-r_2^2 V_z]_{,z}=-i\beta[W_{z,zz}-r_2^2 W_z+P_z/\mu]\end{aligned} \quad ---(16)$$

境界・正則性条件

$$\begin{aligned}z=0;\quad&-i\alpha W_{(x,y,z)}+U_{(x,y,z),z}=0\\&-i\beta W_{(x,y,z)}+V_{(x,y,z),z}=0\\&(\lambda+2\mu)W_{(x,y,z),z}-i\lambda(\alpha U_{(x,y,z)}+\beta V_{(x,y,z)})=0\\z\to\infty;\quad&U_{(x,y,z)}=0,\ V_{(x,y,z)}=0,\ W_{(x,y,z)}=0\end{aligned} \quad ---(17)$$

したがって、個々の加振力別に方程式(15),(16) を境界・正則性条件式(17)の下で解き、像空間解を求める。U_x について示すと、まず、

$$\bar{U}_x=U_{x,z}+i\alpha W_x \quad ---(18)$$

とおき、新しい未知数$\bar{U}_x$ を導入すると微分方程式(15-a)は次式となる。

$$\bar{U}_{x,zz}-r_2\bar{U}_x=-P_{x,z}/\mu \quad ---(19)$$

また、境界・正則性条件式(17)は次式となる。

$$z=0;\quad \bar{U}_x=i2\alpha W_x,\qquad z\to\infty;\quad \bar{U}_x=0 \quad ---(20)$$

以下の展開はWの場合と同様にして$\bar{U}_x$ について解き、式(18)よりU_x を得る。他の未知数も同じようにして求められる。

4．実空間の解

式(10)の像空間の解のうち$\bar{T}_{z1}$についてCagniardの方法による逆変換を行う。まず、次の変数変換を行う。

$$\alpha=\omega\cos\phi-\xi\sin\phi,\qquad \beta=\omega\sin\phi+\xi\cos\phi$$
$$\cos\phi=(x-x_0)/R,\qquad \sin\phi=(y-y_0)/R,\qquad R=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^{1/2} \quad ---(21)$$

さらに、ωにωp、ξにξpを代入し新たにω、ξすると、$\bar{T}_{z1}$の Fourier逆変換$\tilde{T}_{z1}$は次式となる。

$$\tilde{T}_{z1}=1/\pi^2\mathrm{Re}\iint_0^\infty\frac{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2+4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2-4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}\eta_1\,p\,e^{-p\{\eta_1(z+z_0)+i\omega R\}}\,d\omega d\xi \quad ---(22)$$

次に、上式をまずωについて積分し、 Laplace逆変換の後、ξについて積分する順序で式を展開する。

ところで、ωの積分を行う際に次の特異性を考慮しなければならない。（Fig.-1参照）

$$\begin{aligned}\eta_1&=0;\quad \omega=\pm i(\xi^2+1/c_1^2)^{1/2}\\\eta_2&=0;\quad \omega=\pm i(\xi^2+1/c_2^2)^{1/2}\\F&=0;\quad \omega=\pm i(\xi^2+1/c_R^2)^{1/2}\end{aligned} \quad ---(23)$$

ここで、c_R はRayleigh波速度である。

さらに次の変数変換を行い、積分をω平面からq平面へ移す。（Fig.-2参照）

$$q=\eta_1(z+z_0)+i\omega R \qquad ---(24)$$

この変数変換によりω平面上の積分路 O-Eはq平面上 O'-E'に変換され、さらに、Cauchyの積分定理を用い積分の有効部分のみを考えると、積分路はq平面実軸上 J'-∞となる。すなわち、ωによる積分はq平面上で次式となる。

$$\mathrm{Re}\int_{(\xi^2+1/c_1^2)^{1/2}(z+z_0)}^{\infty}\frac{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2-4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2\ \ 4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}\eta_1\,p\,e^{-pq}\,(d\omega/dq)\,dq \qquad ---(25)$$

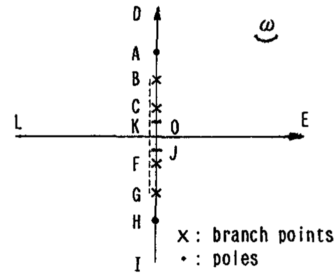

Fig.-1 Complex ω-plane of I_{z1}

次に、Laplace逆変換を考える。Laplace変換パラメタはpであるので被積分項のp e^{-pq} を Laplace逆変換すればよい。これは、

$$\delta(t-q)\underset{(t)}{※}\frac{d}{dt}\delta(t) \qquad ---(26)$$

となり、さらに、超関数論の合成積より、I_{z1}は次式となる。

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2+4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2-4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}\eta_1(d\omega/dq)\right]_{q=t}\right] \qquad ---(27)$$

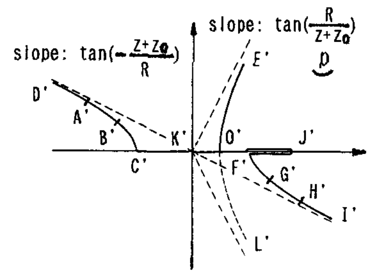

Fig.-2 Complex q-plane of I_{z1}

次に、ξに関する積分を行う。

$$I_{z1}=1/\pi^2\mathrm{Re}\int_0^\infty\left[\frac{d}{dq}\left[\frac{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2+4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2-4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}\eta_1(d\omega/dq)\right]\right]_{q=t}\cdot\theta\left[t-(\xi^2+1/c_1^2)^{1/2}\{R^2+(z+z_0)^2\}^{1/2}\right]d\xi \qquad ---(28)$$

ところで、Heaviside 関数の引き数が正である条件より、ξ、tについて次のようになる。

$$0\leqq\xi\leqq[t^2/\{R^2+(z+z_0)^2\}-1/c_1^2]^{1/2} \qquad \{R^2+(z+z_0)^2\}^{1/2}/c_1\leqq t \qquad ---(29)$$

故に、実空間における解I_{z1}は次式のように求められる。

$$I_{z1}=1/\pi^2\mathrm{Re}\int_0^{[t^2/\{R^2+(z+z_0)^2\}-1/c_1^2]^{1/2}}\left[\frac{d}{dq}\left[\frac{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2+4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}{(\omega^2+\xi^2+\eta_2^2)^2-4(\omega^2+\xi^2)\eta_1\eta_2}\eta_1(d\omega/dq)\right]\right]_{q=t}d\xi \qquad ---(30)$$

これは、方程式(6) の Green関数となり、加振点(x_0, y_0, z_0)と観測点(x, y, z) を結ぶ波動伝播関数の一つである。また、時間tに関して、$t<\{R^2+(z+z_0)^2\}^{1/2}/c_1$では零で、disterbance がないことを示しており、また、$t=\{R^2+(z+z_0)^2\}^{1/2}/c_1$は、この Green関数の遅延時間である。以上のように、像空間解の他の項もCagniardの方法で逆変換し、実空間の Green関数を得ることができる。従って、実空間の変位解はこれらの Green関数と各加振力との時間tに関する合成積の形で求められる。

参考文献

1)地震動と地盤　日本建築学会 ,1983.

2)第12回地盤震動シンポジウム　日本建築学会 ,1984.

3)笠原慶一　:地震の力学　鹿島出版会 ,1982.

4)望月・中沢:超関数による二次元半無限一様弾性地盤の振動解（その1．内部点加振をうける場合）建築学会大会梗概,S.57.10

5)望月・中沢:超関数による二次元半無限一様弾性地盤の振動解（内部点加振をうける場合）,6th日本地震工学シンポ ,1982.12

6)望月・中沢・吉原:超関数による二次元半無限一様弾性地盤の振動解（内部点加振をうける場合）工学院大学研究報告 ,1983.10

7)望月・中沢:超関数による3次元半無限一様弾性地盤の振動解（内部点加振をうける場合）建築学会大会梗概,S.58.9

8)望月・中沢:超関数による3次元半無限一様弾性地盤の振動解（内部点加振をうける場合　その2）建築学会大会梗概,S,60.10

9)Schwartz L.　:物理数学の方法　岩波書店 ,1978.
　:超関数論　岩波書店 ,1975.

10)Kecs H.,and Teodorescu P.P.:Applications of the Theory of Distributions in Mechanics,ABACUS PRESS,1974.

11)Sneddon I.N.　:Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity,SPRINGER-VERLAG,1975.