

(48) 拡張カルマンフィルターを用いた振動系の同定

武蔵工業大学 正会員 ○星谷 勝
フジタ工業(株) 正会員 斎藤 悦郎

1 はじめに

入、出力観測波形を用い、システムのパラメーター（材料特性）を推定する問題を同定問題という。振動系のようにシステムを構成する構成方程式がある程度明確な場合には、制御理論の拡張カルマンフィルターによる時系列解析は、有効な方法であり、直接そのパラメーターを同定することが可能である。1自由度系の線形系、バリエア系、等価線形化に対する同定問題は、文献4,5により数値的にその有効性を明らかにした。多自由度系システムでは、その自由度数に対する観測波形数及び拡張カルマンフィルターへの構成方程式の定式化が、同定問題の重要な要素となる。本報告では、線形多自由度系のシステムを対象とし、シミュレーションにより求めた入出力観測波形を用い、上述の問題に対して数値的に検討を行った。また、筆者らが提案した拡張カルマンフィルターに併用する重み付きグローバルな繰返し法、安定性評価基準の有効性をも同時に数値的に明らかにした。

2. 拡張カルマンフィルター

拡張カルマンフィルターは、非線形連続型状態方程式(1)式と非線形離散型観測方程式(2)式

$$d\mathbf{x}_t/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t) \quad (1) \quad \mathbf{x}_{t_0} \sim N(\hat{\mathbf{x}}_{t_0}, \mathbf{P}_{t_0})$$

$$\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t_k}, t_k) + \mathbf{v}_{t_k} \quad (2) \quad \mathbf{v}_{t_k}; \text{ガウス白色雑音 } E[\mathbf{v}_{t_k}, \mathbf{v}_{t_l}^T] = \mathbf{R}(t_k) \delta_{k,l} \quad (\delta_{k,l}, \text{クロネッカー・デルタ関数})$$

に対する(3)~(7)式の漸化的なアルゴリズムで、初期の最適推定値 $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$ と初期の推定誤差の共分散値 $\mathbf{P}(t_0|t_0)$ が与えられれば、漸化的に最適状態推定値を求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k) = \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t|t_k), t) dt \quad (3)$$

$$\mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) = \mathbf{A}(t_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)) \mathbf{P}(t_k|t_k) \mathbf{A}^T(t_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k) + \mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) [\mathbf{y}_{t_{k+1}} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1})] \quad (5) \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(t_{k+1}|t_{k+1}) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) \mathbf{M}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k))] \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) \mathbf{M}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k))]^T + \mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) \mathbf{R}(t_{k+1}) \mathbf{K}^T(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) \quad (7)$$

$$\mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) = \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) \mathbf{M}^T(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) [\mathbf{M}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) \mathbf{M}^T(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)) + \mathbf{R}(t_{k+1})]^{-1}$$

ここに： $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)$; $\mathbf{y}_{t_k}$ が与えられた時の t_k 時間における状態推定ベクトル（最適推定値）

$\mathbf{P}(t_k|t_k)$; $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)$ と真の値 $\mathbf{x}_{t_k}$ との差の共分散行列、 $\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)$; $\mathbf{y}_{t_k}$ が与えられた時の t_{k+1} における状態推定ベクトル

$\mathbf{P}(t_{k+1}|t_k)$; $\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)$ と真の値 $\mathbf{x}_{t_{k+1}}$ との差の共分散行列、 $\mathbf{K}(t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k))$; t_{k+1} でのフィルターゲイン行列

$\mathbf{y}_{t_k}$; t_k 時間での観測ベクトル、 $\mathbf{y}_{t_k} = \{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}\}$, $\mathbf{I}$; 単位行列、 $\mathbf{M}(t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_{t_k}; t_k)}{\partial \mathbf{x}_j} \right\}_{\mathbf{x}_{t_k} = \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)}$

$\mathbf{A}(t_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)) \approx \mathbf{I} + \Delta \mathbf{F}(t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k))$ ただし $\mathbf{F}(t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \mathbf{x}_j} \right\}_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)}$

拡張カルマンフィルターを同定問題へと拡張するためには、(1)式の右辺を入力を含めたものとして読み替え、次に同定するパラメーターをシステム状態変数ベクトルと直列に組み込む。このようにして、拡張カルマンフィルターのアルゴリズムを用いることにより、システム状態変数の最適推定値と、パラメーターの最適推定値を同時に求めることができる。

3. 同定結果の安定性評価基準

我々は、ある有限個の観測データから任意の初期条件の基で同定を行なう。このため同定結果がほんとうに安定した結果であるか、の疑問が残る。そこで同定結果が初期条件の影響を受けなければ安定である、という基本的な考え方から、図-1のアルゴリズムを構成した。このアルゴリズムは、任意の初期値 $\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0$ での同定結果 $\hat{\mathbf{x}}(t_s|t_s)$, $\mathbf{P}(t_s|t_s)$ を初期値 $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$, $\mathbf{P}(t_0|t_0) \times W$ として再び同定を行なう方法である。そしてこのグローバルな繰返しにより、 $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$ と $\hat{\mathbf{x}}(t_s|t_s)$ の値がほぼ等しくなる $\hat{\mathbf{x}}(t_s|t_s)$ を、安定した同定結果であると判断するものである。

る。また $P(t_0|t_0)$ は、初期値 $\hat{x}(t_0|t_0)$ の動き易さを意味したもので、可制御性であれば $P(t_0|t_0)$ の値はかなり小さくなる。この理由からアルゴリズム中に導入した重み W は、各グローバルな繰返し初期の活性化による、不安定な同定結果の判断し易さと、安定速度を高める効果を意図したものである。このアルゴリズムを用いても、パラメーターの同定結果がある値に漸進しない場合には

$$y_{ik} = y_{ik} - \hat{y}_i(t_k|t_k), \quad r_i = \left(\sum_{k=1}^S y_{ik}^2 \right) / \left(\sum_{k=1}^S y_{ik}^2 \right)$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} r_i, \quad \bar{\theta} = \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha} (r_i - \bar{\beta})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ここで、 S ；観測波形のデータ数、 α ；観測波形の波形数の評価値 $\bar{\theta}$ を用い、 $\bar{\theta}_{min}$ の評価基準を導入することにより、 $\bar{\theta}$ の判断を行った。この $\bar{\theta}_{min}$ は、各観測波形と最適推定値の差の正規化2乗平均 r_i がバランス良く最小になる値を意味したものである。

4. 同定方法及びモデル

図-2は、直接積分法型から式化した状態方程式を用いる方法に対するモデルである。図-4は、モード解析法型から式化した状態方程式を用いる方法に対するモデルである。また例えば、図-2(a)は、入力 $\ddot{x}_0$ 及び右質点の応答変位波形 (y_1, y_2, y_3) が観測波形として得られ、また右質点の質量 (m_1, m_2, m_3) も既知であり、バネ定数 (K_1, K_2, K_3) 及び粘性減衰 (C_1, C_2, C_3) を同定することを意味している。入力波形特性は、0.1~10.0Hzの有帯域白色雑音で、最大加速度 $1.0m/sec^2$ 、継続時間15sec、時間刻み $0.0/sec$ とした。なお図-2(a)の場合には、応答波形の2乗平均値に対して5%の雑音を付加した波形を観測波形として用いた。

5. 1 状態方程式の誘導(直接積分法型)^{*4)}

n -自由度系の運動方程式は、

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_0 \quad (J=[1, 1]^T) \quad (8)$$

$X_1 = X, X_2 = \dot{X}, u = \ddot{x}_0$ とし状態空間表示すると

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -M^{-1}CX_2 - M^{-1}KX_1 - Ju \end{bmatrix} \quad (9)$$

次に同定するパラメーターを次のように状態ベクトルで置き換える。

$$X_3 = [x_{2n+1}, \dots, x_{2n+n}]^T = [k_1, \dots, k_n]^T \quad (10)$$

$$X_4 = [x_{2n+1}, \dots, x_{2n+n}]^T = [c_1, \dots, c_n]^T$$

パラメーターが定常であるとする(9)式は

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -M^{-1}C(X_4)X_2 - M^{-1}K(X_3)X_1 - Ju \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

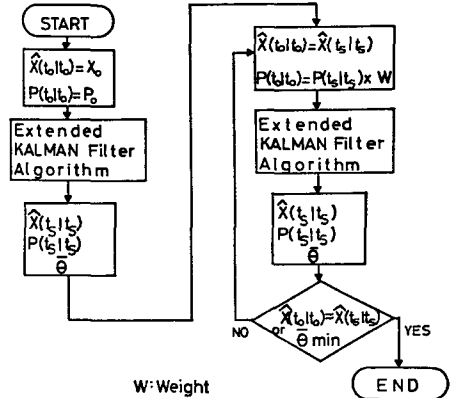


図-1 同定結果の安定性評価のアルゴリズム

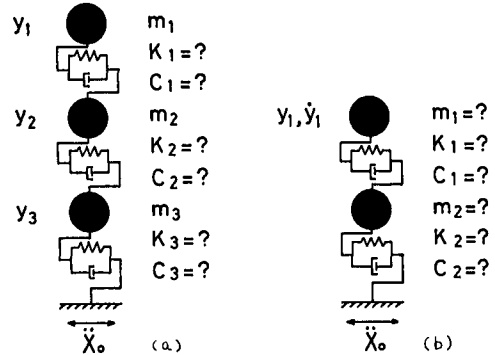


図-2 モデル(直接積分法型)

表-1 初期条件(図-2(a)のモデル)

	x_1	x_2	x_3	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{x}_3$
$X(t_0 t_0)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$P(t_0 t_0)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3
$X(t_0 t_0)$	100.0	100.0	100.0	1.000	1.000	1.000
$P(t_0 t_0)$	1000.	1000.	1000.	1000.	1000.	1000.

$R=1.0 \times 10^{-4}$ $W=100.0$

表-2 同定結果(図-2(a)のモデル)

GIT	$\gamma_{1, \text{global}}$	$\gamma_{2, \text{global}}$	$\gamma_{3, \text{global}}$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{k}_3$	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$	$\bar{\theta}$
1	20.32	86.30	125.0	59.69	220.2	374.6	-1.83	8.261	69.51	74.85
2	8.751	51.49	63.82	58.30	211.7	609.3	-0.56	8.558	93.37	40.87
3	5.162	10.81	17.77	49.36	328.2	730.5	1.290	10.82	-3.11	8.930
4	4.740	5.090	7.540	46.81	370.9	764.8	1.317	7.800	2.514	2.150
5	4.728	4.753	5.080	46.13	400.1	747.1	1.302	6.183	6.302	0.278
6	4.728	4.731	4.749	45.94	411.7	736.1	1.299	5.617	7.250	0.016
7	4.728	4.731	4.736	45.92	413.2	734.6	1.299	5.517	7.347	0.006
8	4.728	4.731	4.735	45.92	413.3	734.5	1.299	5.516	7.347	0.006
9	4.728	4.731	4.735	45.92	413.3	734.5	1.299	5.516	7.347	0.006
10	4.728	4.731	4.735	45.92	413.3	734.5	1.299	5.516	7.347	0.006
Exact Values				45.92	413.3	734.8	1.299	5.511	7.350	

GIT:Global Iteration Times

ここで、 $C(X_3)$, $K(X_3)$ は、 C , K 行列の各要素をそれぞれ状態変数 X_4 , X_3 の各要素で置き換えたことを意味している。

となり(1)式に対する状態方程式が得られる。また図-2(b)の質量も未知な場合には、パラメーターの状態変数への置き換えは、

$$X_3 = [x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{4n-1}]^T = \left[\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_1}{m_2}, \frac{k_2}{m_2}, \dots, \frac{k_n}{m_n} \right]^T$$

$$X_4 = [x_{4n}, x_{4n+1}, \dots, x_{5n-1}]^T = \left[\frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_2}, \dots, \frac{c_n}{m_n} \right]^T$$

として変式化を行った。

5. 2 同定結果

—図-2(a)のモデルの場合— 表-1にここで用いた初期条件を示した。

表-2は、各パラメーターの重み ($W=100.0$) 付きグローバルな繰返しに対する同定結果を示したもので、7回程度の繰返しを行えば、各パラメーターは、一定値に漸近し、真の値とほとんど一致することがわかる。 δ_1 , δ_2 , δ_3 の値は、同繰返し以後5%程度となり、観測波形に付加した雑音5%と良い対応がつく。また $\bar{\theta}$ も、0.06と一定値になり、本例題は非常に安定した同定結果が得られることが示されており、より多くの自由度数においても同定が可能であると思われる。

—図-2(b)のモデルの場合— ここでは、質量が未知であるため、 $\frac{k_1}{m_1}$, $\frac{k_1}{m_2}$, $\frac{k_2}{m_2}$, $\frac{c_1}{m_1}$, $\frac{c_2}{m_2}$ が同定するパラメーターとなる。図-3は、 $\frac{k_1}{m_2}$, $\frac{c_2}{m_2}$, $\bar{\theta}$ に対する重み付きグローバルな繰返しによる同定結果を示したもので、グローバルな繰返しを行っても、各パラメーター値は一定値に漸近しない。図中の○印は、 $\bar{\theta}_{min}$ の繰返し時の同定結果を示したもので、各パラメーター値とも、真の値の10%以内に納めることができた。このことから、ここで提案した評価基準がこのような場合に対して有効であることが数値的に確かめられた。また図中 $W=1$ の場合、すなわち重み付けをしない場合には、10回の繰返しを行っても $\bar{\theta}_{min}$ を得ることができず、重み W が安定な同定結果を得る速度を高める効果があることがわかる。なお、本例題のように、1質点でしか観測波形が得られない場合には、2自由度系以上の多自由度系の同定は困難なように思われる。

6. 1 状態方程式の誘導(モード解析法型)

(8)式の微分方程式に対して、 $X = \Xi \eta$ と置いて、

$$\Xi^T M \Xi \ddot{\eta} + \Xi^T C \Xi \dot{\eta} + \Xi^T K \Xi \eta = -\Xi^T M J \ddot{X}_0 \quad (12)$$

ここで

$$\Xi^T M \Xi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \Xi^T C \Xi = \begin{bmatrix} 2\beta^{(1)}\omega^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & 2\beta^{(n)}\omega^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \Xi^T K \Xi = \begin{bmatrix} (\omega^{(1)})^2 & & \\ & \ddots & \\ & & (\omega^{(n)})^2 \end{bmatrix}$$

で表わされるとすると、各次数の運動方程式は、

$$\ddot{\eta}^{(j)} + 2\beta^{(j)}\omega^{(j)}\dot{\eta}^{(j)} + (\omega^{(j)})^2\eta^{(j)} = -\delta^{(j)}\ddot{X}_0$$

ここで、 $x_i = \sum_{j=1}^n \phi_i^{(j)} \eta^{(j)} = \phi_i^{(1)} \eta^{(1)} + \phi_i^{(2)} \eta^{(2)} + \dots + \phi_i^{(n)} \eta^{(n)}$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \phi_i^{(j)} \dot{\eta}^{(j)} = \phi_i^{(1)} \dot{\eta}^{(1)} + \phi_i^{(2)} \dot{\eta}^{(2)} + \dots + \phi_i^{(n)} \dot{\eta}^{(n)}$$

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^n \phi_i^{(j)} \ddot{\eta}^{(j)} = \phi_i^{(1)} \ddot{\eta}^{(1)} + \phi_i^{(2)} \ddot{\eta}^{(2)} + \dots + \phi_i^{(n)} \ddot{\eta}^{(n)}$$

次に

$$(13) \quad \phi_i^{(j)} \eta^{(j)} = \xi_i^{(j)}, \quad \phi_i^{(j)} \dot{\eta}^{(j)} = \dot{\xi}_i^{(j)}$$

$$(14) \quad \phi_i^{(j)} \ddot{\eta}^{(j)} = \ddot{\xi}_i^{(j)}, \quad \phi_i^{(j)} \delta^{(j)} = p_i^{(j)}$$

(15) とおくと、(13)~(16)式は、

$$(16) \quad \ddot{\xi}_i^{(j)} + 2\beta^{(j)}\omega^{(j)}\dot{\xi}_i^{(j)} + (\omega^{(j)})^2\xi_i^{(j)} = -p_i^{(j)}\ddot{X}_0 \quad (17)$$

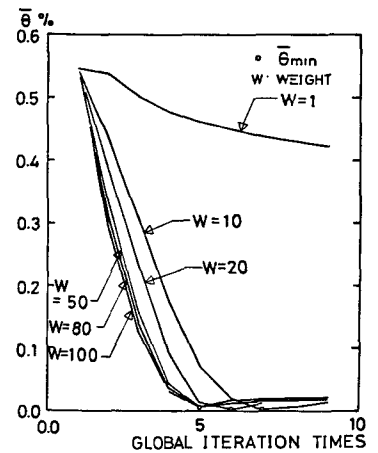
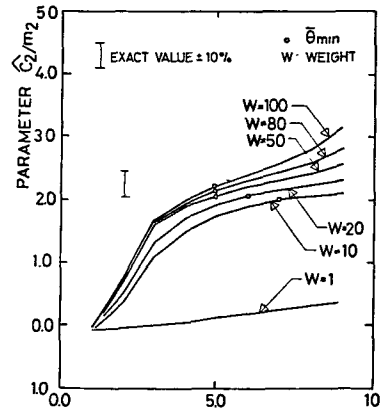
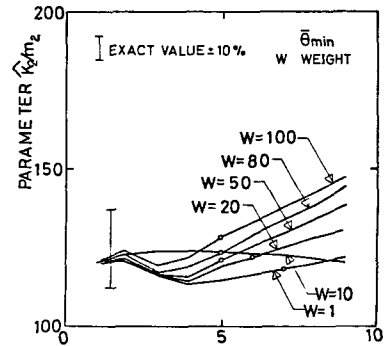


図-3 同定結果(図-2(b))

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \ddot{x}_i^{(j)} = \ddot{x}_i^{(1)} + \ddot{x}_i^{(2)} + \dots + \ddot{x}_i^{(n)} \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \dot{x}_i^{(j)} = \dot{x}_i^{(1)} + \dot{x}_i^{(2)} + \dots + \dot{x}_i^{(n)} \\ x_i &= \sum_{j=1}^n x_i^{(j)} = x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \dots + x_i^{(n)} \end{aligned}$$

[方法 1]

(17)式に対して

$$\begin{aligned} Z_1 &= \ddot{x}_i^{(1)}, & Z_2 &= \ddot{x}_i^{(2)}, & u &= \ddot{x}_0 \\ Z_3 &= \beta^{(1)}, & Z_4 &= \omega^{(1)}, & Z_5 &= P_i^{(1)} \end{aligned}$$

として状態空間表示すると

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \\ \dot{Z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 \\ -2Z_3Z_4Z_2 - (Z_4)^2 - Z_5u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の状態方程式が得られる。

6. 2 同定結果

一方法 1— この方法は、荒っぽい同定方法であるが、簡単であり、計算時間、容量ともかなり少なくて良い特徴を持っている。表-3から、1次、2次程度の刺激係数が大きな次数に対しては、かなり良い精度で各パラメーターを同定できる。しかしながら、3次、4次に対しては、刺激係数が小さく、モード減衰が大きくなることから、この方法では、各パラメーターを同定することができなかった。

一方法 2— 任意の初期条件から直接4自由度系として同定した場合には、計算途中で発散現象を起し、同定が不可能であった。しかしながら、表-3のように、任意の初期条件の基で1自由度系として同定を行ない、次に1次の初期値としては、1自由度系の同定結果を用い、2次に対しては任意の初期条件を用い、2自由度系の同定を行なう。このような方法により、順次各次数のパラメーターを同定することができた。また同乗から明らかのように、自由度数が高くなるに従い、低次のパラメーターも同時に改良されてくることがわかる(例えば、 $P_i^{(1)} 1.317 \rightarrow 1.350$)。

本方法の同定結果は、非常に安定であり、4自由度系以上の多自由度系に

おいても十分同定が可能である。

表-3 同定結果(図-4のモデル)

* 参考文献

- 1) Jazwinski, A.H.: Stochastic processes and filtering theory, Academic press 1970
- 2) Yun C-B and Shinozuka: Identification nonlinear —, J. Struct Mech 1980
- 3) Carmichael D.G.: The state estimation —, ASP 3rd Int conf 1979
- 4) 星谷, 希藤: 振環カルマンフィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土論集(投稿中)
- 5) 星谷, 希藤: 液状化を伴う地盤の等価線形化, 土論集(投稿中)

(18) 本方法は、まず(21)式を用いて同定を行ない、 $Z_1 \sim Z_5$ の最

(19) 適推定値を求める。次に観測波形 y_i 、 $\dot{y}_i$ からそれぞれ Z_1

(20) Z_2 を時系列に差し引き、新たに観測波形を作る。そして再度(21)式を用いて同定を行なう。この繰返しにより各次数のパラメーターの同定を順次行なう方法である。

[方法 2]

各次数に対する運動方程式(17)において

$$\begin{aligned} Z_1 &= \ddot{x}_i^{(1)}, & Z_4 &= \ddot{x}_i^{(2)}, & Z_{11} &= \ddot{x}_i^{(3)}, \\ Z_2 &= \ddot{x}_i^{(1)}, & Z_7 &= \ddot{x}_i^{(2)}, & Z_{12} &= \ddot{x}_i^{(3)}, \dots \\ Z_3 &= \beta^{(1)}, & Z_8 &= \beta^{(2)}, & Z_{13} &= \beta^{(3)}, \\ (21) \quad Z_4 &= \omega^{(1)}, & Z_9 &= \omega^{(2)}, & Z_{14} &= \omega^{(3)}, \\ Z_5 &= P_i^{(1)}, & Z_{10} &= P_i^{(2)}, & Z_{15} &= P_i^{(3)}, \end{aligned}$$

として状態空間表示する。そして、(21)式の状態ベクトル

z を直列に並べる形で状態方程式を作成する。

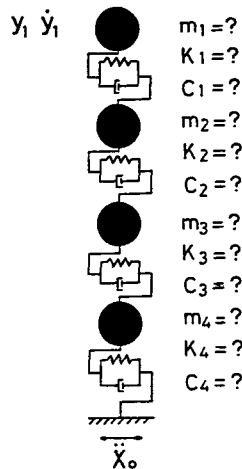


図-4 モデル(モード解析法型)

Mode and γ_1, γ_2	Exact values	One degree of freedom system	Two degree of freedom system	Three degree of freedom system	Four degree of freedom system	Method 1
1 ω β p	4.625 0.05781 1.350	4.621 0.05624 1.317	4.624 0.05772 1.347	4.625 0.05781 1.350	4.625 0.05781 1.350	4.621 0.05540 1.309
2 ω β p	10.78 0.1348 -0.4182		10.76 0.1292 -0.4036	10.78 0.1348 -0.4181	10.78 0.1348 -0.4182	10.90 0.1230 -0.3820
3 ω β p	17.40 0.2175 0.07013			17.38 0.2150 0.06927	17.38 0.2173 0.07001	—
4 ω β p	30.57 0.3821 -0.00159				30.81 0.3840 -0.00152	—
γ_1, γ_2		3.67×10^{-1} 1.89	1.32×10^{-3} 9.34×10^{-3}	2.72×10^{-4} 2.58×10^{-4}	1.25×10^{-4} 1.18×10^{-4}	4.50×10^{-3} 6.40×10^{-3}
Note; ω = Natural circular frequency (rad/sec), β = Modal damping factor, p = Participation factor, γ_1, γ_2 = (percents).						