

(47) 多次元入力による線形構造系の応答共分散漸化式

武蔵工業大学 正員 星谷 勝
○ 同 大学院 学生員 永田 茂

1. はじめに

近年、構造物の動的応答解析では、応答スペクトル曲線や過去の著名な実地震記録を入力地震動とした解析が主として行われている。これらの決定論的解析は、比較的容易であるが、地震動が多くの不確定要因に支配されている点を考えると、その使用において限界があるのは事実である。このような限界を打破する方法のひとつに、不規則振動論を用いた振動解析があり、この分野に関する研究も盛に行われている。

不規則振動論を用いた振動解析では、確率過程入力に対する応答として共分散応答が得られる。さらに、最大応答理論を用いることにより、応答共分散から最大応答の平均・分散値を算出できることは、周知の通りである。本研究では、既往の研究を検討した上で、不規則振動解析の一連の流れの内、応答共分散を効率よく算出する手法の提案をするものである。本研究の概要は、次の通りである。

構造モデルとしては、1地点に多方向地震動が作用する多質点系線形構造物を考えた。まず、モデルの振動方程式を各モードに分離し、それぞれの解を線形加速度法を用いて求め、これをマトリックス表示した。一方、入力を時系列モデルの多次元非定常自己回帰モデル (ARモデル)³⁾ で表わし、これを非定常ホワイトノイズを入力とする状態空間表現を行った。次に、振動方程式の解と、入力のARモデルを結合させることにより、状態方程式を作成した。さらに、ARモデルのホワイトノイズ入力の独立性を用いて、状態方程式から応答共分散漸化式の誘導を行った。漸化式の誘導に関する詳細は、以下の通りである。

2. 応答共分散漸化式の誘導

(1) 振動方程式

非減衰の多質点系構造物の1点に、多成分地震動が作用する場合の振動方程式は、式(1)で表わされる。

$$M\ddot{X} + KX = -M\dot{I}\ddot{z}(t) \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 M 、 K は、それぞれ質量、剛性マトリックス ($n \times n$) を表わす。 I は地震動成分の入力条件を決定する異方マトリックス ($n \times m$)。 X は、相対変位応答ベクトル ($n \times 1$)。 $\ddot{z}(t)$ は、入力加速度ベクトル $[\ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t), \dots, \ddot{z}_m(t)]^T$ ($m \times 1$)。

モードルマトリックス Φ と一般化座標ベクトル Y を用いて、式(1)の解を $X = \Phi Y$ で表わし、各モードに分離した。よって、減衰項を考慮すると i 次モードの振動方程式は、次式で表わされる。

$$\ddot{y}_i + 2\beta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\sum_{k=1}^m R_{ik}\ddot{z}_k(t) \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 β_i 、 ω_i 、 R_{ik} は、それぞれ i 次モードの減衰定数、固有円振動数、入力地震動成分 $\ddot{z}_k(t)$ に対応する刺激係数。

式(2)の微分方程式を、 $t = k\Delta t$ で離散化表示して、線形加速度法を用いて求めた解をマトリックス表示すると、

$$\eta_i(k+1) = H_i\eta_i(k) + E_i\ddot{z}(k+1) \quad \text{----- (3)}$$

となり、 $\eta_i(k)$ 、 $\ddot{z}(k+1)$ 、 H_i 、 E_i は、それぞれ次のように表わされる。

$$\eta_i(k) = [y_i(k), \dot{y}_i(k), \ddot{y}_i(k)]^T \quad (3 \times 1) \quad \text{----- (4)}$$

$$\ddot{z}(k+1) = [\ddot{z}_1(k+1), \ddot{z}_2(k+1), \dots, \ddot{z}_m(k+1)]^T \quad (m \times 1) \quad \text{----- (5)}$$

$$H_i = \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} \\ h_{i21} & h_{i22} & h_{i23} \\ h_{i31} & h_{i32} & h_{i33} \end{bmatrix} \quad (3 \times 3), \quad E_i = \begin{bmatrix} e_{i11} & e_{i12} & \dots & e_{i1m} \\ e_{i21} & e_{i22} & \dots & e_{i2m} \\ e_{i31} & e_{i32} & \dots & e_{i3m} \end{bmatrix} \quad (3 \times m) \quad \text{----- (6), (7)}$$

さらに、式(6),(7)の要素は、次のようになる。

$$\begin{aligned} h_{11} &= 1 + \omega t^2 \alpha_i \omega_i^2 / 6, & h_{12} &= \Delta t + \omega t^2 \alpha_i b_i / 6, & h_{13} &= \omega t^2 / 3 + \omega t^2 \alpha_i d_i / 6, & h_{21} &= \Delta t \alpha_i \omega_i^2 / 2, & h_{22} &= 1 + \Delta t \alpha_i b_i / 2, \\ h_{23} &= \Delta t / 2 + \Delta t \alpha_i d_i / 2, & h_{31} &= \alpha_i \omega_i^2, & h_{32} &= \alpha_i b_i, & h_{33} &= \alpha_i d_i, & \alpha_i &= - \{ 1 + \Delta t \beta_i \omega_i + (\omega_i \Delta t)^2 / 6 \}^{-1}, & b_i &= 2 \beta_i \omega_i + \omega_i^2 \Delta t \\ d_i &= \Delta t \beta_i \omega_i + (\omega_i \Delta t)^3 / 3, & c_{ij} &= \omega t^2 \alpha_i R_{ij} / 6, & c_{2j} &= \Delta t \alpha_i R_{ij} / 2, & c_{3j} &= \alpha_i R_{ij}, & i, j &= 1, 2, \dots, m, & \Delta t &= \text{等間隔の時間刻み} \end{aligned}$$

(2) 入力地震動の確率過程モデル

加速度入力 $\ddot{z}_i(k)$ ($i=1, 2, \dots, m$) を、互いに相関を有するような確率過程でモデル化するために、多次元非定常 AR モデルを用いると、 $\ddot{z}_i(k)$ は、

$$\ddot{z}_i(k) = \sum_{p=1}^i \sum_{j=1}^m b_{ip}(j, k) \ddot{z}_p(k-j) + \varepsilon_i(k) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \text{-----}(8)$$

となる。式(8)において、 $\ddot{z}_i(k)$ は $E[\ddot{z}_i(k)] = 0$ の確率過程である。 $b_{ip}(j, k)$ は、 $\ddot{z}_i(k)$ の周波数の非定常性を決定する係数である。また、 $\varepsilon_i(k)$ は、 $E[\varepsilon_i(k)] = 0$ であり、 $\ddot{z}_i(k)$ の振幅の大きさ、形状を決定する非定常ホワイトノイズである。 $\varepsilon_i(k)$ と $\varepsilon_j(l)$ の共分散には、

$$E[\varepsilon_i(k) \varepsilon_j(l)] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \sigma_{ij}^2(k) & k = l \end{cases} \quad \text{-----}(9)$$

なる性質がある。 $E[\]$ は、期待値を表す。

式(8)の AR モデルを応答共分散漸化式に組み込むために、状態空間表示すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{P}}_1(k) \\ \dot{\tilde{P}}_2(k) \\ \dot{\tilde{P}}_3(k) \\ \vdots \\ \dot{\tilde{P}}_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(k), & & & & 0 \\ B_{21}(k), & B_{22}(k), & & & \\ B_{31}(k), & B_{32}(k), & B_{33}(k), & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1}(k), & B_{m2}(k), & B_{m3}(k), & \dots, & B_{mm}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(k-1) \\ \tilde{P}_2(k-1) \\ \tilde{P}_3(k-1) \\ \vdots \\ \tilde{P}_m(k-1) \end{bmatrix} + \mathbf{V} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(k) \\ \varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_3(k) \\ \vdots \\ \varepsilon_m(k) \end{bmatrix} \quad \text{-----}(10)$$

となる。ここで、 $\dot{\tilde{P}}_i(k)$ 、 $B_{ii}(k)$ 、 $B_{ij}(k)$ 、 $\mathbf{V}$ は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_i(k) &= [\ddot{z}_i(k), \ddot{z}_i(k-1), \ddot{z}_i(k-2), \dots, \ddot{z}_i(k-M+1)]^T \quad (M \times 1) \quad \text{-----}(11) \\ B_{ii}(k) &= \begin{bmatrix} b_{ii}(1,k), b_{ii}(2,k), \dots, b_{ii}(M+1,k), b_{ii}(M,k) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (M \times M) \\ B_{ij}(k) &= \begin{bmatrix} b_{ij}(1,k), b_{ij}(2,k), \dots, b_{ij}(M+1,k), b_{ij}(M,k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (i \neq j) \quad \text{-----}(12), (13) \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (m \times m) \quad \text{-----}(14) \end{aligned}$$

式(10)は、初期値ベクトル $[\tilde{P}_1(0), \tilde{P}_2(0), \dots, \tilde{P}_m(0)]^T$ と、各時刻の非定常ホワイトノイズベクトル $[\varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k), \dots, \varepsilon_m(k)]^T$ を与えることにより、各時刻の確率過程入力を漸化的に算出できる式である。

(3) 応答共分散漸化式

式(1)の振動方程式の解、および式(8)の確率過程入力は、式(3),(10)のように時間領域の漸化式で表わすことができた。そこで、式(3),(10)を結合して、入力と応答を要素とする状態ベクトルに関する状態方程式の形に整理すると、

$$\bar{W}_i(k+1) = \bar{T}_i(k+2) \bar{W}_i(k) + \bar{U} \varepsilon(k+2) \quad \text{----- (15)}$$

となる。ここで、 $\bar{W}_i(k)$ は、応答と入力を要素とする状態ベクトルであり、次式で表わされる。

$$\bar{W}_i(k) = [\bar{q}_i(k) \mid \bar{p}_1(k+1), \bar{p}_2(k+1), \dots, \bar{p}_m(k+1)]^T \quad \text{----- (16)}$$

また、 $\bar{T}_i(k+2)$ は、時刻 k の状態ベクトル $\bar{W}_i(k)$ から時刻 $k+1$ の状態ベクトル $\bar{W}_i(k+1)$ への移行を規定する非定常遷移マトリックスであり、式(17)で表わすことができる。

$$\bar{T}_i(k+2) = \begin{bmatrix} H_i & E_i V^T & & \\ 0 & B_{11}(k+2), & & 0 \\ & B_{21}(k+2), B_{22}(k+2), & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & B_{m1}(k+2), B_{m2}(k+2), \dots, B_{mm}(k+2) \end{bmatrix} \quad \text{----- (17)}$$

{(3+mM) \times (3+mM)}

さらに、 $\bar{U}$ 、 $\varepsilon(k+2)$ は、次式のようになる。

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 & V^T \end{bmatrix}^T \quad \text{----- (18), (19)}$$

(3+mM) \times 1 \quad \quad \quad \varepsilon(k+2) = [\varepsilon_1(k+2), \varepsilon_2(k+2), \dots, \varepsilon_m(k+2)]^T \quad \quad \quad m \times 1

式(15)を変形することにより、 $\bar{W}_i(k+1)$ と $\bar{W}_j(k+1)$ の応答共分散マトリックスは、容易に求められる。まず、 i 次モード、および j 次モードに対応する状態ベクトル $\bar{W}_i(k+1)$ 、 $\bar{W}_j^T(k+1)$ の積を求め、その期待値をとると、

$$\begin{aligned} E[\bar{W}_i(k+1) \bar{W}_j^T(k+1)] &= \bar{T}_i(k+2) E[\bar{W}_i(k) \bar{W}_j^T(k)] \bar{T}_j^T(k+2) + \bar{T}_i(k+2) E[\bar{W}_i(k) \varepsilon^T(k+2)] \bar{U}^T \\ &\quad + \bar{U} E[\varepsilon(k+2) \bar{W}_j^T(k)] \bar{T}_j^T(k+2) + \bar{U} E[\varepsilon(k+2) \varepsilon^T(k+2)] \bar{U}^T \end{aligned} \quad \text{----- (20)}$$

となる。ここで、ARモデルのホワイトノイズ入力の独立性を考慮すると、式(20)の第2、3項は、0となる。よって、式(20)は式(21)のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(k+1) &= \bar{T}_i(k+2) \alpha_{ij}(k) \bar{T}_j^T(k+2) + \bar{U} \sigma^2(k+2) \bar{U}^T \quad \text{----- (21)} \\ \alpha_{ij}(k) &= E[\bar{W}_i(k) \bar{W}_j^T(k)], \quad \sigma^2(k+2) = E[\varepsilon(k+2) \varepsilon^T(k+2)] \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_{ij}(k)$ は、応答共分散マトリックスであり、 $\sigma^2(k+2)$ は、非定常ホワイトノイズの共分散マトリックスである。式(21)は、初期値 $\alpha_{ij}(0)$ と各時刻の $\sigma^2(k+2)$ を代入することにより、各時刻の応答共分散を効率よく算出できる理論漸化式である。実際の応答は、 $\alpha_{ij}(k)$ の要素から求めることができる。例えば、絶対加速度の応答共分散は、

$$\begin{aligned} E[\ddot{x}(k) \ddot{x}^T(k)] &= \Phi E[\ddot{y}(k) \ddot{y}^T(k)] \Phi^T + I E[\ddot{z}(k) \ddot{z}^T(k)] \Phi^T \\ &\quad + \Phi E[\ddot{y}(k) \ddot{z}^T(k)] I^T + I E[\ddot{z}(k) \ddot{z}^T(k)] I^T \end{aligned} \quad \text{----- (22)}$$

と表わされるが、式中の $E[\ddot{y}(k) \ddot{y}^T(k)]$ 、 $E[\ddot{z}(k) \ddot{y}^T(k)]$ 、 $E[\ddot{y}(k) \ddot{z}^T(k)]$ 、 $E[\ddot{z}(k) \ddot{z}^T(k)]$ は、 $\alpha_{ij}(k)$ の要素として、すべて求められる。

(4) 応答共分散漸化式の初期値に関する検討

式(2)の振動方程式の初期変位・速度を、 $y_i(0) = \dot{y}_i(0) = 0$ と仮定する。さらに、式(8)において、 $\ddot{z}_i(k \leq 0) = 0$ とすれば、 $\ddot{y}_i(0) = 0$ を得る。また、式(8)から $E[\ddot{z}_i(1) \ddot{z}_j(1)] = E[\varepsilon_i(1) \varepsilon_j(1)] = \sigma_{ij}^2(1)$ を得る。

以上の条件を用いると、初期値 $\alpha_{ij}(0)$ は、

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(0) &= E[\bar{W}_i(0) \bar{W}_j^T(0)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(1) & \sigma_{12}^2(1) & \dots & \sigma_{1m}^2(1) \\ \sigma_{21}^2(1) & \sigma_{22}^2(1) & \dots & \sigma_{2m}^2(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2(1) & \sigma_{m2}^2(1) & \dots & \sigma_{mm}^2(1) \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{----- (23)} \end{aligned}$$

{(3+mM) \times (3+mM)}

となる。

3. 数値計算例

構造モデルとして、ねじれ振動モデル(図-1)を考えた。このモデルは、水平2方向の水平運動と、鉛直軸回りの回転運動が連成する3自由度系モデルである。図-1のモデルの振動方程式は、次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} M \\ M \\ I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 e_2 \\ 0 & k_2 & k_2 e_1 \\ -k_1 e_2 & k_2 e_1 & k_3 + k_1 e_2^2 + k_2 e_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M \\ M \\ I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \end{bmatrix}$$

$M=9.80 \times 10^3 (\text{kg})$, $I_G=1.18 \times 10^4 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$, $k_1=k_2=3.92 \times 10^4 (\text{kN/m})$, $k_3=3.92 \times 10^2 (\text{kN} \cdot \text{m})$
 $e_1=60 (\text{cm})$, $e_2=120 (\text{cm})$, $\beta_i=0.05 (i=1,2,3)$, $\ddot{z}_1(t)=E-W$, $\ddot{z}_2(t)=N-S$ 。

次に、1971年2月、San Fernando地震のMillikan Library (Calif. Inst. of Tech.)における加速度記録のうち、木成2成分(E-W, N-S成分)を、2次元ARモデルでモデル化して構造物の主軸に作用させた。入力をモデル化した際に得られた、係数 $b_{ip}(j,k)$ とホワイトノイズの共分散 $\sigma_{ij}^2(k)$ を、図-2、図-3に示した。さらに、図-2、図-3のAR係数を用いて算出した相対変位のR.M.S.応答を、図-4に示した。なお、図-4には、 $b_{ip}(j,k)$, $\varepsilon_i(k)$ を用いて作成した50波の標本関数に関するsimulation解も示してある。

応答共分散漸化式から得られた解は、全継続時間において、simulation解とよく一致している。これは、理論式および初期条件の妥当性を表すものである。

4. 結 び

本研究は、複雑な構造系の応答共分散を効率よく算出することができ、漸化理論式の誘導を行ったものである。この応答共分散漸化式を最大応答理論に関する研究に結び付けることにより、構造物の最大応答の統計量を容易に算出することができるようになる。

参考文献

- 1) DeChauxury, A. and D.A. Gasparini: State Space Random Vibration Theory, A Report to N.S.F. ENG 77-19364, Case Western Reserve Univ., Oct., 1980.
- 2) たとえば、岡林隆敏: 単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析, 土論集, No. 286, 1979年.
- 3) Hoshiya, M. and T. Chiba: Simulation Methods of Multi-Dimensional Non-Stationary Stochastic Processes by Time Domain Models, Proc. of JSCE, No. 296, April, 1980.
- 4) 田治見 宏: 建築振動学, コロナ社

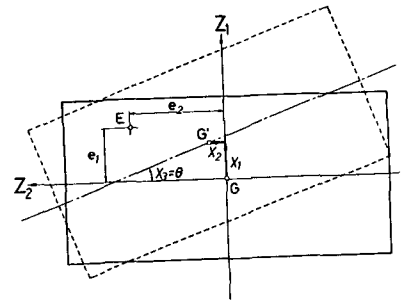


図-1: ねじれ振動モデル⁴⁾

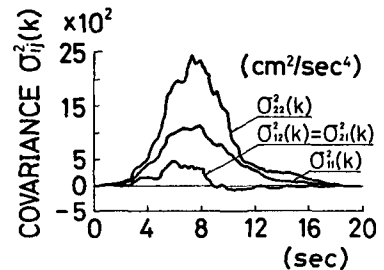


図-3: ホワイトノイズの共分散 $\sigma_{ij}^2(k)$

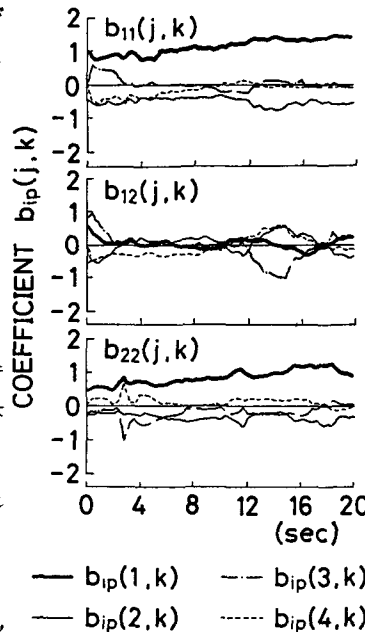


図-2: AR係数 $b_{ip}(j,k)$

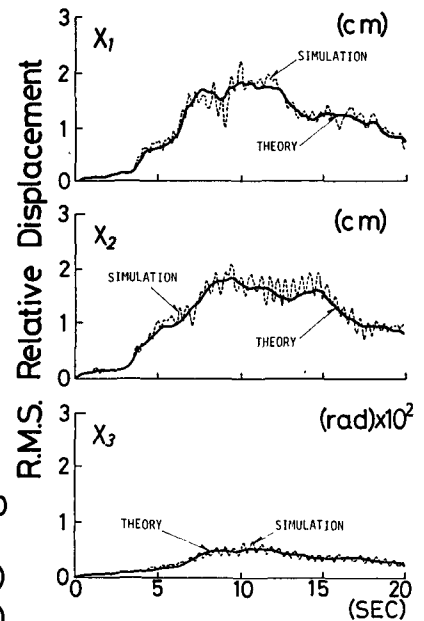


図-4: 相対変位のR.M.S.応答