

(38) 地盤の振動モードに及ぼす地下逸散減衰の効果

京都大学防災研究所 佐藤 忠信

1. まえがき

地盤の振動特性をモード解析法に基づいて求めるには、剛な基盤を想定して解析することが多い。この場合、基盤を通して逸散する波動による減衰を評価することは困難であった。本研究では、逸散減衰効果を厳密に評価すると地盤の固有振動数は複素数になり、固有モードも複素数になることを明らかにした上で、こうした場合のモード解析法を展開する。つぎに、逸散減衰効果を等価な内部減衰に置換するための方法論を述べ、等価減衰定数を用いたモード解析結果と厳密解との比較を行い、基盤を剛体と仮定した非減衰振動モードによる解析結果がかなりの精度で厳密解を近似できることを示す。

2. 2層系地盤の解析

図-1に示すような2層地盤を考える。この場合、周波数領域における運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2 u_i}{dz_i^2} + k_i^2 u_i = 0 \quad (1)$$

ここに、 $k_i = \omega / C_i$ は i 層の波数、 ω は円振動数、 C_i は i 層のせん断波速度、 z_i と u_i は i 層の座標と変位を表わしている。

i 層の深さ z_i におけるせん断応力を $\tau_i(z_i)$ とすれば、境界条件は次式で与えられる。

$$z_1 = 0 \text{ で } \tau_1 = 0 \quad (2) \quad z_1 = H, z_2 = 0 \text{ で } u_1(H) = u_2(0), \tau_1(H) = \tau_2(0) \quad (3)$$

式(3)の条件をききおくと次式となる。

$$\mu_1 \frac{du_1}{dz_1} = i p_2 C_2 \omega \{ 2f - u_1(H) \} \quad (4)$$

ここに、 f は $z_2 = 0$ での上昇波の振幅であり、 μ_1 は表層のせん断弾性係数である。

2.1 固有値解析

いま、 $u_1 = \bar{u}_1 + 2f$ とし、相対変位に変換すれば、式(1)～(4)の関係式は次式のようにになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{表層の運動方程式} : \mu_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dz_1^2} + p_1 \omega^2 \bar{u}_1 = -2 p_1 \omega^2 f \\ \text{境界条件} : \mu_1 \frac{d \bar{u}_1}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0, \mu_1 \frac{d \bar{u}_1}{dz_1} \Big|_{z_1=H} = -i \omega p_2 C_2 \bar{u}_1(H) \end{array} \right\} \quad (5)$$

式(5)の第1式を満すモード解は次式で与えられる。

$$\bar{u}_1 = A_1 \cos k_1 z_1 \quad (6)$$

式(6)を式(5)の第3式に代入し、固有方程式として次式を得る。

$$\cos k_1 H + i \beta \sin k_1 H = 0, \quad \text{ここに} \quad \beta = \frac{p_1 C_1}{p_2 C_2} \quad (7)$$

式(7)より固有振動数 ω_n とし、次式を得る。

$$\omega_n = -\frac{i C_1}{2H} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \pm \left(\frac{2n-1}{2H} \right) \pi C_1 \quad (8)$$

式(8)より以下のようなことがわかる。図-1に示したような半無限弾性基盤上に載った表層地盤の固有振動数は複素数になる。その実数部は基盤層を剛体と考えた場合の固有振動数そのものであり、虚数部は表層と基盤層のインピーダンス比 β の関数であり、インピーダンス比が小さくなるにつれてゼロに近づく特性を有している。

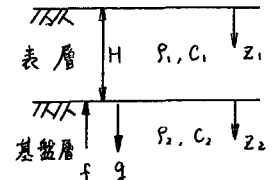


図-1 地盤モデル

2.2 モードの直交性

式(5)で表わされる運動方程式と境界条件を重ね合せて考えると、任意の仮想変位 $\bar{v}$ に対し次式を得る。

$$\int_0^H \mu_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dz_1^2} \bar{v} dz + \int_0^H \rho \omega^2 \bar{u}_1 \bar{v} dz - \left\{ \mu_1 \frac{d \bar{u}_1}{dz_1} \right|_{z_1=H} + i \omega \rho_2 c_2 \bar{u}_1(H) \right\} \bar{v}(H) = 0 \quad (9)$$

式(9)の第1項を部分積分して整理すると次式を得る。

$$- \int_0^H \mu_1 \frac{d \bar{u}_1}{dz_1} \frac{d \bar{v}}{dz_1} dz + \int_0^H \rho \omega^2 \bar{u}_1 \bar{v} dz - i \omega \rho_2 c_2 \bar{u}_1(H) \bar{v}(H) = 0 \quad (10)$$

いま、 $\omega = \omega_n$, $\bar{u}_1 = \phi_n$, $\bar{v} = \phi_m$ を式(10)に代入し、 $\omega = \omega_m$, $\bar{u}_1 = \phi_m$, $\bar{v} = \phi_n$ を式(10)に代入して得られる式を差し引いた結果を考える。すなわち、

$$\rho_1 (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^H \phi_n \phi_m dz - i (\omega_n - \omega_m) \rho_2 c_2 \phi_n(H) \phi_m(H) = 0 \quad (m \neq n) \quad (11)$$

式(11)はモードの直交性を表わしており、剛な基盤層上に広がる水平な表層地盤の場合に現われる古典的なモードの直交性を表わす関係式 $\int_0^H \phi_n \phi_m dz = 0 \quad (m \neq n)$ とは異なった形式になっている。

2.3 モード解析

式(11)で与えられる関係式は複素モード ϕ_m に対する一般化された直交関係と見ることができ、 ϕ_n を用いて、運動方程式を直接モードごと α 振動系に分割することは簡単ではない。しかしながら、以下のような取り扱いによって、従来から行なわれている非減衰系のモード解析とほぼ同様の解析が可能になる。式(5)の第1式に仮想変位 $\bar{v}$ を乗じて次式を得る。

$$\int_0^H \mu_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dz_1^2} \bar{v} dz + \rho \omega^2 \int_0^H \bar{u}_1 \bar{v} dz = -2 \rho_1 \omega^2 f \int_0^H \bar{v} dz \quad (12)$$

いま、 $\bar{u}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$, $\bar{v} = \phi_m^*$ ($*$ は共役複素数と表わす) を代入すれば、次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n^2 - \omega^2) a_n \int_0^H \phi_n \phi_m^* dz = 2 \omega^2 f \int_0^H \phi_m^* dz \quad (13)$$

式(13)は無次元の連立方程式であるが、 N 次までのモードで応答が近似できるとすれば、次式のようなマトリックス形式の方程式で表現できる。

$$[\alpha_{mn}] \{a_n\} = 2 \omega^2 f \{b_m\} \quad (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mn} &= (\omega_n^2 - \omega^2) \int_0^H \phi_n \phi_m^* dz = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega_n + \omega_m^*} i \frac{\rho_2}{\rho_1} c_2 \phi_n(H) \phi_m^*(H) \\ b_m &= \int_0^H \phi_m^* dz \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)で α_{mn} の最後の関係式を得るには式(11)で表わされる直交性の性質を利用している。

式(14)を解くと次式のような関係式が得られる。

$$(\omega_n^2 - \omega^2) a_n = 2 \omega^2 f \cdot F(b_i, \omega_i, \omega_j^*, \phi_i(H), \phi_j^*(H)) \quad (16)$$

式(16)に現われる関数 F は複素モード系における刺激係数であり、次式のように表現される。

$$F = \frac{1}{\phi_n(H)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1 + \omega_1^*} & \frac{1}{\omega_2 + \omega_1^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_1^*} \\ \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^*} & \frac{1}{\omega_2 + \omega_2^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_2^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1 + \omega_N^*} & \frac{1}{\omega_2 + \omega_N^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_N^*} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1 + \omega_1^*} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_1^*} \frac{b_1}{\phi_1^*(H)} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_1^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_1^*} \\ \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^*} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_2^*} \frac{b_2}{\phi_2^*(H)} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_2^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_2^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1 + \omega_N^*} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_N^*} \frac{b_N}{\phi_N^*(H)} & \frac{1}{\omega_{n+1} + \omega_N^*} & \cdots & \frac{1}{\omega_N + \omega_N^*} \end{vmatrix} \quad (17)$$

2.4 等価減衰定数

式(8)で与えられる固有振動数を、剛な基盤で支持されたフーフト形粘弾性地盤の固有振動数と等値することにより、地下伝散減衰効果を内部減衰に置換することを試みる。基盤が剛な場合の粘弾性表層地盤の固有振動数は次式のように与えられる。

$$\omega_n = i h_n \omega_{0n} \pm \omega_{0n} \sqrt{1 - h_n^2} \quad (18)$$

式(18)と式(8)と等値し、 h_n^2 が小さいと仮定すると h_n と ω_{0n} の値として次式が求まる。

$$h_n = -\frac{1}{(2n-1)\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \omega_{0n} = \left(\frac{2n-1}{2H}\right) \pi \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \quad (19)$$

式(19)から、表層地盤の等価せん断弾性係数(μ_1)とせん断粘性係数(μ_1')は次式のように与えられる。

$$\mu_1 = \omega_{0n}^2 \cdot \left\{ \frac{2H}{(2n-1)\pi} \right\}^2 \rho_1, \quad \mu_1' = 2 h_n \mu_1 \omega_{0n} \quad (20)$$

2.5 数値計算例

以上述べてきた解析手法の有用性を検証するために表-1に示すような地盤定数を用いて数値計算を行った。図-2はモードの重ね合せ数を5とした場合の解(●印)とSH波の重複反射理論より求めた解(実線)との比較を行ったものである。入射波の振幅を1とした場合の地表面における応答倍率が上側の曲線であり、基盤と表層の境界面における応答倍率が下側の曲線である。図から明らかなように、モードの重ね合せ数を5程度とすれば、3次モードぐらいまでの応答は正確に表現できることが判明する。

図-3は式(19)より与えられるモードごとの減衰定数をインピーダンス比を変数として示したものである。式(19)からも明らかなように n 次モードと m 次モードの減衰定数の比 $h_n/h_m = (2n-1)/(2m-1)$ となり、高次モードほど減衰定数が急激に減少することが明らかである。

図-4には図-3で与えられる減衰定数を用いて地表面の応答倍率を計算した結果が示されている。この場合は基盤が剛であるので、基盤の振幅は2としてある。図中の実線は重複反射理論から求まる厳密解(基盤は弾性体)であり、●印は無減衰系の振動モードと式(19)で与えられる等価減衰定数を用いてモード解析を行った結果である。モードの重ね合せ数は5としてある。破線は1次モードに対する減衰が全ての周波数で有効であるとして、剛な基盤上にある表層地盤の応答倍率を重複反射理論により求めたものである。この図から地下伝散減衰を等価な内部減衰に置き換えても、かなりの精度で

表-1 地盤定数

	せん断波速度	層厚	単位体積重量
表層	160 m/sec	40m	1.8 t/m ³
基盤層	320 m/sec	∞	1.8 t/m ³

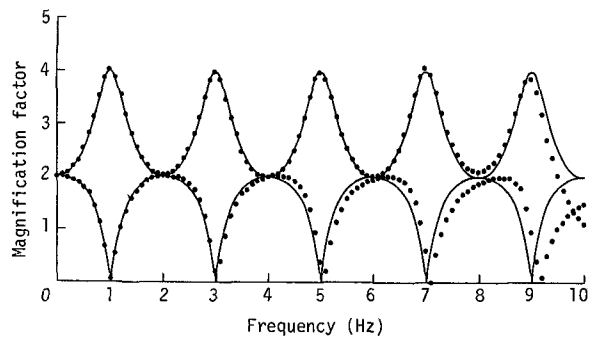


図-2 モード解析解と重複反射理論解との比較

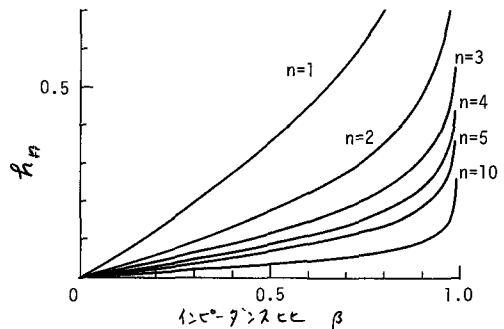


図-3 等価減衰定数

地表面の応答特性を近似できることが明らかである。

3. 一般化

2節では2層地盤系を用いて解析法の概要を説明したが、普通に遭遇する地盤は多層構造を有しているのが一般的であるから、以下では多層地盤系に対する定式化を行う。

図-5に示すように M 層からなる地盤を考える。この場合には伝達マトリックスを用いた解析法が有効になる。²⁾ j 番目の層上端での変位を $U_j(0)$ とし、せん断応力を $\tau_j(0)$ とすれば、 $(j+1)$ 番目の層上端での変位 $U_{j+1}(0)$ とせん断応力 $\tau_{j+1}(0)$ は次式の関係式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} U_{j+1}(0) \\ \tau_{j+1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_j H_j & \frac{\sin k_j H_j}{p_j c_j \omega} \\ -p_j c_j \sin k_j H_j & \cos k_j H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j(0) \\ \tau_j(0) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

いま、上式中のマトリックスを T_j と置き、

$$Q = T_{M-1} \cdot T_{M-2} \cdots T_j \cdots T_1$$

とすれば、式(5)の第3式で与えられた境界条件と同じ形式のものは次式で与えられる。

$$\tau_{M-1}(H_{M-1}) = -i\omega p_M c_M U_M(H_{M-1}) \quad (22)$$

$\tau_1(0) = 0$ であることを考慮すると、式(22)は次式のように変形できる。

$$Q_{11} + i\beta_M Q_{21} / (p_M c_M \omega) = 0, \quad \beta_M = (p_{M-1} c_{M-1}) / (p_M c_M) \quad (23)$$

式(23)は複素固有振動数を決める特性方程式になっている。これから決定される固有振動数を $\omega_n = a_n + ib_n$ とすると、これに等価なフオークト形粘弾性地盤の減衰定数 h_n ならびに非減衰固有振動数 ω_{on} は次式のように与えられる。

$$h_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \omega_{on} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (24)$$

4. おわりに

波動の逸散減衰を考慮したモード解析法を展開しその有用性を示した。さらに、逸散減衰効果を内部減衰に置き換えるための一般的な方法論を示し、非減衰系の振動モードを用いたモード重ね合せ法によってかなりの精度で地盤の応答特性が表現できることを明らかにした。2の結果、等価減衰定数を用いた簡便なモード解析法に基づいて地盤の応答値を推定することが可能となった。

参考文献

- 1) 小坂, 南井; 地震応答計算における固有値問題について, 地震工学国内シンポジウム, P.147-P.152, 1962
- 2) 土岐; 構造物の耐震解析, 新体系工工学11, 技報堂出版, P.82-P.90, 1981.3.

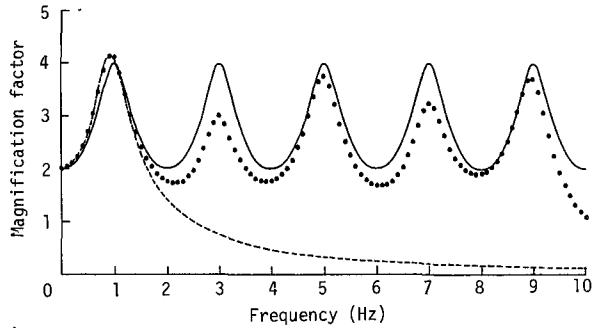


図-4 等価減衰を用いた系の応答と厳密解の比較

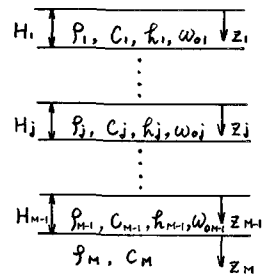


図-5 多層地盤系