

(24) 非均質地盤における地震動解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次
京都大学工学部 正員○廣瀬壯一
京都大学大学院 学生員 莫野牧夫

1. はじめに

地盤の不整形性、あるいは、非均質性が地震動に大きな影響を与えることは、以前から知られており、差分法(FDM)、有限要素法(FEM)、Aki-Larner法、境界積分方程式法(BIEM)など、数多くの解法により、解析が行われてきた。その中でも、BIEMは、半無限領域や、無限領域の解析にも容易に適用できることから、比較的最近になって、地震動解析に応用された解法であり、例えば、Wong et al.^{1),2)}、小橋・篠崎³⁾、Sánchez-Sesma and Esquivel⁴⁾、Niwa et al.⁵⁾などによる研究がある。しかしながら、従来のBIEMによる解析は、すべて、地盤を均質弾性体あるいは、均質弾性な層の集合体とみなして計算を行っており、その物性値が、地盤内において任意に変化し得る。いわゆる、非均質地盤に対しては適用できなかった。そこで、本論文は、このような非均質地盤に対して、積分方程式法を適用し、その地震動特性を明らかにしようとするものである。

本論文においては、2次元SH波を取り扱うが、その支配方程式と類似の支配方程式を有する問題に、微小振幅長波に関する問題がある。この分野においては、水深の変化する港湾における振動問題(これは、非均質地盤におけるSH波の問題に対応するものである)を対象として、BIEMと他の数値解法との結合手法が数多く提案されている。例えば、BIE-FD^{6),7)}、BIE-FE^{8),9)}、BIE-DIE(領域型積分方程式)^{10),11)}などがある。本論文における定式化は、BIE-DIEの考え方を導入してなされ、その結果は、Mattoli¹⁰⁾によって得られた結果と同様な形式を持つ。

2. 非均質弾性体における定式化

2.1 基礎方程式

境界2Dで囲まれた領域Dを、2次元、等方、"非均質"、線形弾性体であると仮定する。この時、定常状態におけるSH波の運動方程式は、

$$L(\mu; \omega)u = \nabla \cdot (\mu \nabla u) = -(\rho \omega^2 u + Pb) \quad (1)$$

となる。ただし、 $L(\mu; \omega)$ は微分作用素であり、 u 、 b 、 μ 、 ρ 、 ω は、それぞれ、面外変位、物体力、せん断剛度、密

度、角周波数を表す。ここで、注意しなければいけないのは、非均質弾性体という仮定より、 μ とは定数ではなく、位置 X の関数であるということである。一般に、混合境界値問題は、式(1)を次の境界条件の下で解く問題である。

$$u(X) = \bar{u}(X) \quad \text{on } \partial D_u \quad (2)$$

$$t(X) = \bar{t}(X) \quad \text{on } \partial D_t, \quad \partial D \equiv \partial D_u \cup \partial D_t \quad (3)$$

ただし、 $t(X)$ は、

$$t(X) = \nabla(\mu; \omega)u(X) = \mu(\mathbf{n} \cdot \nabla)u(X) \quad (4)$$

により定義される表面力であり、 $\bar{u}(X)$ 、 $\bar{t}(X)$ は、それぞれ、境界 ∂D_u 、 ∂D_t において与えられた変位、及び、表面力である。さらに、 \mathbf{n} は、境界3D上の外向き単位法線ベクトルを表す。

2.2 変位の積分表示式

一般に、任意の非均質弾性体に対して、その基本解を求めるることは、難しいので、本論文においては、ラプラス方程式における基本解を用い、材料の非均質性、並びに、慣性力に関する項を等価物体力とみなして変位の積分表示式を構成することにする。

まず、せん断剛度 $\mu(X)$ を均質な部分 μ^* (任意の定数)と非均質性を表す部分 $\bar{\mu}(X)$ (位置 X の関数)に分ける。すなわち、

$$\mu(X) = \mu^* + \bar{\mu}(X) \quad (5)$$

とする。ただし、簡単のために、 $\bar{\mu}(X)$ は、領域D内において、連続な関数であると仮定する。

式(5)を式(1)に代入すると、

$$M(\mu^*; \omega)u \equiv \mu^* \nabla \cdot \nabla u = -F \quad (6)$$

となる。ただし、 F は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} F &= L(\bar{\mu}; \omega)u + \rho \omega^2 u + \rho b \\ &= \nabla(\bar{\mu} \nabla u) + \rho \omega^2 u + \rho b \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、次式で定義される基本解 U を考える。

$$M(\mu^*; \omega)U = -F \quad (8)$$

ただし、 F は、Diracのδ関数を表す。すなわち、 U は、ラプラス方程式における基本解であり、次式に

より与えられる。

$$U(X, Y) = \frac{1}{2\pi\mu^*} \ln \frac{1}{r} \quad (9)$$

ただし、 $r = |X - Y|$ である。

まず、field point X が、領域 D の内部にある場合を考えよう。Fig. 1 に示すように、点 X を中心として、半径 ϵ の円を $s(X; \epsilon)$ とし、その表面を $s(X; \epsilon)$ とする。式(6)の右辺、 F は、ラプラス方程式における非均質項とみなすことができるので、式(6)と式(8)を用いて、領域 $D - s(X; \epsilon)$ に対して、相反定理を適用すると¹²⁾

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D + s(X; \epsilon)} [U(X, Y) \{T(\mu^*; \alpha_y) u(Y)\} - \{U(X, Y) T(\mu^*; \alpha_y)\} u(Y)] dS_Y \\ &\quad + \int_{D - s(X; \epsilon)} U(X, Y) F(Y) dV_Y, \text{ for } X \in D \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $T(\mu^*; \alpha)$ は、式(4)によって定義された微分作用素であり、 n_y, α_y における指標 y は、点 Y に関する作用を意味する。さらに 式(10)の右辺最後の項は、卷散定理を用いて、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{D - s(X; \epsilon)} U(X, Y) F(Y) dV_Y &= \int_{D - s(X; \epsilon)} U(X, Y) \{F(Y) \nabla \cdot \{\bar{u}(Y) \nabla u(Y)\} \\ &\quad + f(Y) w^2 u(Y) + f(Y) b(Y)\} dV_Y \\ &= \int_{\partial D + s(X; \epsilon)} [U(X, Y) \{T(\bar{\mu}; \alpha_y) u(Y)\} - \{U(X, Y) T(\bar{\mu}; \alpha_y)\} u(Y)] dS_Y \\ &\quad + \int_{D - s(X; \epsilon)} U(X, Y) \{L(\bar{\mu}; \alpha_y) u(Y)\} dV_Y \\ &\quad + \int_{D - s(X; \epsilon)} U(X, Y) \{f(Y) w^2 u(Y) + f(Y) b(Y)\} dV_Y \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} U(X, Y) L(\bar{\mu}; \alpha_y) &= \nabla_Y \cdot \{\bar{u}(Y) \nabla U(X, Y)\} \\ &= \bar{u}_Y \bar{\mu}(Y) \cdot \nabla_Y U(X, Y) + \bar{u}(Y) / \mu^* \cdot M(\mu^*; \alpha_y) U(X, Y) \\ &= \bar{u}_Y \bar{\mu}(Y) \cdot \nabla_Y U(X, Y) \quad (\text{式(8)より } M(\mu^*; \alpha_y) U = 0, \text{ for } X \neq Y) \end{aligned}$$

式(11)を式(10)に代入して、 $\tilde{T}(\mu, \alpha) = \tilde{T}(\mu^*; \alpha) + \tilde{T}(\bar{\mu}; \alpha)$ なる関係を用いると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D + s(X; \epsilon)} [U(X, Y) \{T(\mu^*; \alpha_y) u(Y)\} - \{U(X, Y) T(\mu^*; \alpha_y)\} u(Y)] dS_Y \\ &\quad + \int_{D - s(X; \epsilon)} \{U(X, Y) L(\bar{\mu}; \alpha_y)\} u(Y) dV_Y \\ &\quad + \int_{D - s(X; \epsilon)} \{U(X, Y) \{f(Y) w^2 u(Y) + f(Y) b(Y)\}\} dV_Y, \text{ for } X \in D \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\epsilon \rightarrow 0$ なる極限操作をとれば、

$$\begin{aligned} \frac{\mu(X)}{\mu^*} u(X) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s(X; \epsilon)} \{U(X, Y) T(\mu^*; \alpha_y)\} u(Y) dS_Y \\ 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s(X; \epsilon)} \{U(X, Y) \{T(\mu^*; \alpha_y)\} u(Y)\} dS_Y \end{aligned} \quad (13)$$

などから、式(12)は、

$$\begin{aligned} \frac{\mu(X)}{\mu^*} u(X) &= \int_{\partial D} \{U(X, Y) - T(X, Y) u(Y)\} dS_Y \\ &\quad + \int_D \{U(X, Y) L(\bar{\mu}; \alpha_y)\} u(Y) dV_Y + w^2 \int_D U(X, Y) f(Y) u(Y) dV_Y \\ &\quad + \int_D U(X, Y) f(Y) b(Y) dV_Y, \text{ for } X \in D \end{aligned} \quad (14)$$

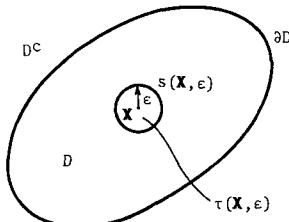


Fig. 1 The domain to which the reciprocal theorem is applied, X in D .

となる。ただし、 $T(X, Y) = U(X, Y) T(\mu^*; \alpha_y)$ である。

同様な極限操作をすれば、 ∂D 上の X に対して、次の積分表示式を得ることができる。

$$\begin{aligned} C^e(X) u(X) &= \int_{\partial D} \{U(X, Y) - T(X, Y) u(Y)\} dS_Y \\ &\quad + \int_D \{U(X, Y) L(\bar{\mu}; \alpha_y)\} u(Y) dV_Y + w^2 \int_D U(X, Y) f(Y) u(Y) dV_Y \\ &\quad + \int_D U(X, Y) f(Y) b(Y) dV_Y, \text{ for } X \text{ on } \partial D \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $C^e(X)$ は、二重層ボテンシャルの外部極限における free term であり、次式で定義される。

$$C^e(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s(X; \epsilon)} T(X, Y) dS_Y \quad (16)$$

ただし、この場合の $s(X; \epsilon)$ は、点 X を中心とし、半径 ϵ の円の表面の内、領域 D に含まれる部分を示しておき、もし、点 X の近傍が、なめらかな境界ならば、

$$C^e(X) = \frac{1}{2} \frac{\mu(X)}{\mu^*} \quad (17)$$

となる。

また、 $X \in D^c$ (D^c は領域 D の補領域) に対してても同様に積分表示式が得られ、これと、式(14)、(15)をまとめれば、次の結果を得ることができます。

$$\begin{aligned} E(X) u(X) &= \int_{\partial D} \{U(X, Y) - T(X, Y) u(Y)\} dS_Y \\ &\quad + \int_D \{U(X, Y) L(\bar{\mu}; \alpha_y)\} u(Y) dV_Y + w^2 \int_D U(X, Y) f(Y) u(Y) dV_Y \\ &\quad + \int_D U(X, Y) f(Y) b(Y) dV_Y \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、もし、境界 ∂D がなめらかであれば、 $E(X)$ は、

$$E(X) = \begin{cases} \mu(X) / \mu^* & \text{for } X \in D \\ \mu(X) / (2\mu^*) & \text{for } X = x \text{ on } \partial D \\ 0 & \text{for } X \in D^c \end{cases} \quad (19)$$

である。これは、Mattioli が、水深の変化する港湾の振動解析において得た結果に対応するものである。

3. 非均質地盤における地震動解析への応用

前節において得られた積分表示式を用いて、非均質地盤表面における地震動解析を行う。解析モデルは、Fig. 2 に示すように、半無限均質基盤 D_+ (μ_+, ρ_+) と非均質沖積層 D_- (μ_-, ρ_-) から成り、 D_+ の下方遠方より、平面 SH 波 \tilde{u}^I が入射角 θ で入射するものとする。

ここで、 D_- における物性値 μ_- 、 ρ_- は、位置 X の関数であり、 μ_+ 、 ρ_+ は一定値である。また、 ∂D_- 、 ∂D_+ における境界条件、並びに、 ∂M における連続条件は、次式で与えられるとする。

$$t_- = \tilde{T}(\mu_-; \omega) u_- = 0 \quad \text{on } \partial D_- \quad (20)$$

$$t_+ = \tilde{T}(\mu_+; \omega) u_+ = 0 \quad \text{on } \partial D_+ \quad (21)$$

$$u_+ = u_- \text{ and } t_+ = -t_- \quad \text{on } \partial M \quad (22)$$

さらに、 D_+ における変位 u_+ は、次式で表わされる。

$$u_+ = u_+^I + u_+^R + u_+^S \quad (23)$$

ここに、 u_+^I は入射波、 u_+^R は半無限境界による反射波、 u_+^S はそれ以外の散乱波を表わす。この時、 u_+^S は、 D_+ の下方遠方において、放射条件を満足するものと仮定する。

3.1 非均質沖積層 D_- における定式化

式(18)と境界条件、式(20)により、次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon(X) u_-(X) &= \int_M U(X, Y) t_-(Y) dSY - \int_{\partial D_- \cap M} T(X, Y) u_-(Y) dSY \\ &+ \int_D \{ U(X, Y) L(Y) dY + \omega^2 \rho_- M(Y) U(X, Y) \} u_-(Y) dV_Y \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、物体力 b は、0であると仮定した。

3.2 半無限均質基盤 D_+ における定式化

D_+ は、均質な半無限弾性体であるといつ仮定により、通常の、半無限領域における動弾性問題の基本解を用いて、BIE を構成することができ、次式を得る。

$$\begin{aligned} \xi(X) u_+(X) &= u_+^I(X) + u_+^R(X) \\ &+ \int_M \{ V(X, Y; \omega) t_+(Y) - D(X, Y; \omega) u_+(Y) \} dSY \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、基本解 $V(X, Y; \omega)$ は、

$$L(\mu_+; \omega) V + \omega^2 V = -\delta \quad (26)$$

を満足し、かつ、境界条件、式(21)を満足するもので、

$$V(X, Y, \omega) = \frac{k_f}{\sqrt{\mu_+}} \{ H_0^{(1)}(k_f r) + H_0^{(2)}(k_f r') \} \quad (27)$$

で与えられる。ただし、 k_f は、 D_+ における横波の波数を表わし、 $k_f = \omega \sqrt{\frac{\rho_+}{\mu_+}}$ である。また、 $r' = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 + Y_2)^2}$ である。さらに、 $D(X, Y) = V(X, Y) \tilde{T}(\mu_+; i\omega)$ であり、また、 $\xi(X) = I(X \in D_+ \text{ or on } \partial D_+) \cdot V_2(X \text{ on } \partial M), 0(\text{その他})$ である。

3.3 構造的離散化、並びに、結合方法

次の仮定の下に、式(24)、(25)を離散化する。境界 ∂D_- 、 ∂M を、それぞれ、 N_- 、 M 個の線要素に分割し、領域 D_- を ND_- 個の面要素に分割する。そして、各要素内においては、変位 u 、および、表面力 t が一定であるとする。この離散化法に従えば、式(24)、(25)は、それぞれ、次のようになります。

$$\epsilon u_- = [I] t_- - [T] u_- + [U_D] u_-, \quad \text{for } X \in D_-, \text{ or } X = x \text{ on } \partial D_- \text{ and } \partial M \quad (28)$$

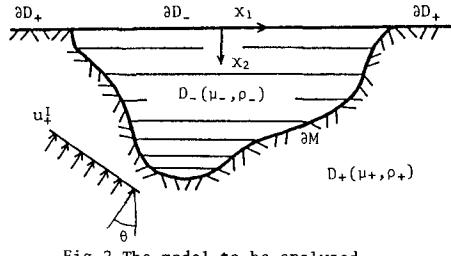


Fig. 2 The model to be analyzed.

$$\xi u_+ = u_+^I + u_+^R + V t_+ - [D] u_+, \quad \text{for } X = x \text{ on } \partial M \quad (29)$$

あるいは、

$$u_- = (\xi + T - [U_D])^{-1} I t_- \equiv P t_- \quad (30)$$

$$u_+ = (\xi + D)^{-1} (u_+^I + u_+^R) + (\xi + D)^{-1} V t_+ \equiv d + Q t_+ \quad (31)$$

となる。ただし、 P 、 Q 、 d は、それぞれ、 $(N_- + M + ND_-) \times M$ 、 $M \times M$ 、 $M \times 1$ のデイメンジションを持つマトリックスである。式(30)と(31)は、 ∂M 上における連続条件、式(22)により結合され、次式を得る。

$$(P_M + Q) t_- = d \quad (32)$$

ただし、 P_M は、 P のサブマトリックスであり、 $M \times M$ のデイメンジションを持っている。よって、式(32)より、 ∂M 上の t_- は、

$$t_- = (P_M + Q)^{-1} d \quad (33)$$

として求められ、式(30)、(31)を用いれば、変位 u も求められる。

4 數値解析例

まず、本解析法の精度を確かめるために、Trifunac¹³⁾により得られた数値解との比較を行う。Trifunacは、均質な半円形沖積層上の変位を、固有関数展開による方法で求めている。したがって、本解析法においては、 μ_- 、及び、 ρ_- を一定とすることにより、対応する解を得ることができ。その結果をFig. 3に示す。横軸は、半円の半径 a により無次元化された位置 X_1/a であり、縦軸は、入射波の振幅に対する表面上の変位の比、す

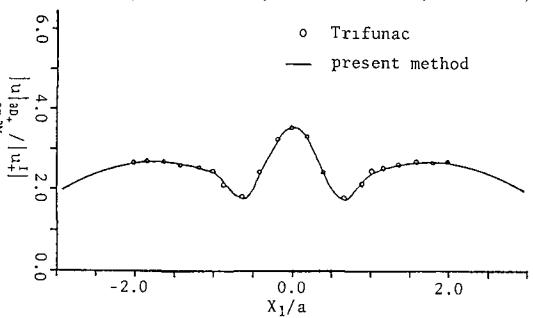


Fig. 3 Comparison between the results obtained by Trifunac (1971) and the present method.
($\mu_-/\mu_+ = 1/6$, $\rho_-/\rho_+ = 1.5$, $ak_f^2 = \pi/2$, $\theta = 0^\circ$)

なわち、応答倍率を示している。実線が本解析法による解であり、○が、Trifunacによる解を表わしている。ただし、 $\mu_-/\mu_+ = 1/6$, $P_-/P_+ = 1.5$, $ak_+^T = \pi/2$, $\theta = 0^\circ$ の場合であり、さらに、本解析法においては、分割数を $N_- = 20$, $M = 10$, $ND = 70$ とした。両者はよく一致しており、本解析法の妥当性が検証された。

次に、 D (深さ)/ W (底辺長さ) = 1/2 なる逆三角形形状をした非均質沖積層地盤における地表面上の変位を解析する。Fig. 4 にその結果を示す。各図において、横軸は、深さ D により無次元化された位置 x_1/D ($-1 \leq x_1/D \leq 1$ が沖積層上の地表面に相当する) であり、縦軸は、変位応答倍率を示す。また、斜軸は、無次元化波数 dk_+^T であり、 dk_+^T を 0.1 から 4.0 まで、0.1 間隔で計算した。詳しい解析パラメータは 図中に示したが、すべての場合に対して、非均質沖積層内における密度 P_- は、基盤における密度 P_+ に等しく一定とし、剛度 μ_- のみが変化するものとした。

Fig. 4(a) と (b) を比較すれば、沖積層内の剛度 μ_- が変化することによって、変位モードの遷移状態はあまり変化しないが、(b)の方が、変位が大きく、かつ、全体としてモードが低周波数域へ移行していることがわかる。また、(b)と(c)の比較によれば、入射角の変化により、変位モードが大きく変化し、斜入射の場合には 垂直入射の場合よりも、変位が局所的に大きくなることがわかる。

5. 結び

本論文においては、非均質地盤における地震動特性を、BIE-DIE 法により解析した。2.2 における定式化によれば、式(18)より明らかのように、角周波数 W が横分の外に出でおり、地震動解析のような動的解析に非常に有利であることがわかる。なお、本論文においては、2 次元 SH 波を取り扱ったが、本定式化は、2 次元 P-SV 波¹⁹⁾、あるいは 3 次元問題にも適用可能であり、その応用範囲は広いものである。

参考文献

- 1) Wong, H.L. and P.C. Jennings; Bull. Seism. Soc. Am., 65, pp.1239-1257, 1975.
- 2) Wong, H.L. et al.; Bull. Seism. Soc. Am., 67, pp.353-368, 1977.
- 3) 小嶋謙二・篠崎祐三; 地震, 30, pp.127-142, 1977.
- 4) Sánchez-Sesma, F.J. and J.A. Esquivel; Bull. Seism. Soc. Am., 69, pp.1107-1120, 1979.
- 5) Niwa, Y. et al.; Proceedings of the Sixth Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.417-424, 1982.
- 6) Olsen, K. and L.S. Hwang, J. Geophys. Res., 76, pp.5048-5064, 1971.
- 7) Shaw, R.P., J. Appl. Mech., 42, pp.147-152, 1975.
- 8) Shaw, R.P. and W. Falby; Comp. and Fluids, 6, pp.153-160, 1978.
- 9) Shaw, R.P.; Recent Advances in Boundary Element Methods, Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, pp.137-147, 1978.
- 10) Lautenbacher, C.C., J. Fluid Mech., 41, pp.655-672, 1970.
- 11) Mattioli, F.; Comp. and Fluids, 6, pp.161-172, 1978.
- 12) Watson, J.O.; Developments in Boundary Element Methods-1, Eds. P.K. Banerjee and R. Butterfield, Appl. Sci. Pub., pp.31-63, 1979.
- 13) Trifunac, M.D.; Bull. Seism. Soc. Am., 61, pp.1755-1770, 1971.
- 14) Niwa, Y. et al.; Proceedings of 5th International Conference on Boundary Elements, Hiroshima, Japan, Nov. 8-11, 1983.

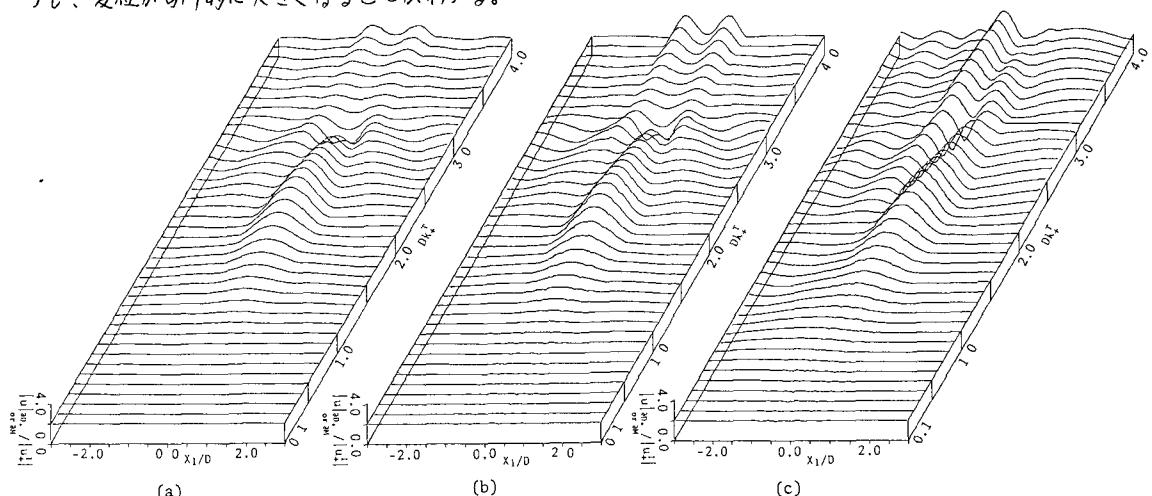


Fig. 4
Surface displacements

case	rigidity μ_-/μ_+	incident angle θ	the others
(a)	(1)	0°	$\rho_- = \rho_+$
(b)	(2)	0°	$N_- = 30$ $M = 38$ $ND = 32$
(c)	(2)	30°	

