

(14) 多次元非定常ARMAモデルの同定法と其の一応用例

武蔵工業大学土木工学科 正員 千葉利晃

1. まえがき

自己回帰(AR)モデル, 移動平均(MA)モデルあるいはこれらを結合した自己回帰移動平均(ARMA)モデル等の時系列モデルはかなり以前より制御の分野で研究が進められてきた。地震工学の分野への応用研究も最近進められている。例えば構造物の動特性の推定, 模擬地震波の作成, 波動伝達関数の推定あるいはP, S波初動の自動検測等の研究がある。ところで地震動は3次元でかつ非定常特性を示すから, 時系列モデルで地震動を表現するには多次元非定常時系列モデルが必要となる。ARおよびMAモデルについては先に報告したので¹⁾、ここでは多次元非定常ARMAモデルの同定法について述べるとともに非定常相互スペクトルの解析法を示す。この多次元非定常ARMAモデルの同定法および非定常相互スペクトル解析法の妥当性は、非定常特性の明確な3次元非定常波形を作成し、この波形を再現することにより行なった。

2. 多次元非定常ARMAモデル

平均値0の多次元非定常確率過程 $x_i(t)$; $i=1, 2, \dots, m$ に対する m 次元非定常ARMAモデルを次式で定義する。

$$x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{c}_{ip}(k, j) x_p(j-k) + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \tilde{h}_{ip}(k, j) a_p(j-k) + a_i(j) \quad ; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

ここで $a_i(j)$ は平均値0, 分散 $\sigma_{a_i}^2(j) = E[a_p(j)a_p(j)]$ を持つ有帯域ホワイトノイズである。係数 $\tilde{c}_{ip}(k, j)$ および $\tilde{h}_{ip}(k, j)$ はある時刻 j での $a_i(j)$ の2乗平均値の和を最小とるように決定する。式(1)より,

$$\sum_{i=1}^m E[a_i^2(j)] = \sum_{i=1}^m E \left[\left\{ x_i(j) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{c}_{ip}(k, j) x_p(j-k) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \tilde{h}_{ip}(k, j) a_p(j-k) \right\}^2 \right] \quad (2)$$

したがって, j を固定し式(2)を $\tilde{c}_{np}(l, j)$ および $\tilde{h}_{np}(l, j)$ で偏微分し0に等値すれば次の2式を得る。

$$E[x_n(j)x_p(j-l)] = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{c}_{np}(k, j) E[x_p(j-k)x_p(j-l)] + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \tilde{h}_{np}(k, j) E[a_p(j-k)x_p(j-l)] \quad (3)$$

$$E[x_n(j)a_p(j-l')] = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{c}_{np}(k, j) E[x_p(j-k)a_p(j-l')] + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \tilde{h}_{np}(k, j) E[a_p(j-k)a_p(j-l')] \quad (4)$$

$$n=1, 2, \dots, m \quad p=1, 2, \dots, m \quad l=1, 2, \dots, M(j) \quad l'=1, 2, \dots, L(j)$$

N' を正の整数として $(j-N')\Delta t \leq t \leq (j+N')\Delta t$ 区間で $x_i(j)$ は区間定常と仮定すれば, 式(3)の x の相互相関関数は次に示す推定式で集合平均 $E[\cdot]$ を計算することができる。

$$E[x_n(j)x_p(j-l)] = \frac{1}{2N'} \sum_{\omega=j-N'}^{j+N'} x_n(\omega)x_p(\omega-l), \quad E[x_p(j-k)x_p(j-l)] = \frac{1}{2N'} \sum_{\omega=j-N'}^{j+N'} x_p(\omega-k)x_p(\omega-l) \quad (5)$$

式(3), (4)中の $a_i(j)$ は観測されていない入力であるから, $x_i(j)$ と $a_i(j)$ の相互相関関数は Gersch 他²⁾の提案した2段階最小2乗法を多次元非定常問題に適用できるように拡張して求めることにする。 $x_i(j)$ に式(6)に示すARモデルをあてはめ係数 $\tilde{c}_{ip}(k, j)$ を推定する。一方同じ $x_i(j)$ を式(7)に示すMAモデルで表わす。

$$x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{c}_{ip}(k, j) x_p(j-k) + a_i(j) \quad \dots (6) \quad x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_{ip}(k, j) a_p(j-k) + a_i(j) \quad \dots (7)$$

式(7)の係数 $\tilde{h}_{ip}(k, j)$ は式(6)の係数 $\tilde{c}_{ip}(k, j)$ を用いて次に示す漸化式より求めることができる。

$$\tilde{h}_{ip}(k, j) = \sum_{p=1}^m \sum_{l=1}^{M(j)} \tilde{c}_{ip}(l, j) \tilde{h}_{pp}(k-l, j-l) \quad ; \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m & k=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, \infty & \tilde{h}_{pp}(k-l, j) = 0 \text{ for } k < l \end{matrix} \quad (8)$$

$$\tilde{h}_{ip}(0, j) = \begin{cases} 1 & ; \quad i=p \\ 0 & ; \quad i \neq p \end{cases}$$

式(8)より係数 \tilde{h} がARモデルの係数 \tilde{a} を用いて求められるから、式(3),(4)中の α と a の相互相関関数は式(7)より次のようにして求めることができる。例えば $E[a_p(j-k)x_g(j-l)] = E[a_i(j) a_g(j-l)] = 0$; $i \neq g$ であるから、

$$E[a_p(j-k)x_g(j-l)] = E\left[a_p(j-k) \sum_{r=1}^m \sum_{l'=0}^{\infty} \tilde{h}_{gp'}(k', j-l) a_p(j-l-k')\right] = \sum_{p'=1}^m \tilde{h}_{gp'}(k-l, j-l) \tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k) \quad (9)$$

ここで、 $\tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k) = E[a_p(j-k) a_{p'}(j-k)]$ 。これらを式(3),(4)に代入しマトリックスの形に整理すれば、

$$\begin{bmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ \vdots \\ f_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} + 2N' \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \cdots & \tilde{H}_{1m} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \cdots & \tilde{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{m1} & \tilde{H}_{m2} & \cdots & \tilde{H}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} & \cdots & \tilde{\sigma}_{1m} \\ \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{22} & \cdots & \tilde{\sigma}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}_{m1} & \tilde{\sigma}_{m2} & \cdots & \tilde{\sigma}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \\ \vdots \\ h_{nm} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{n1} \\ \tilde{h}_{n2} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \cdots & \tilde{H}_{1m} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \cdots & \tilde{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{m1} & \tilde{H}_{m2} & \cdots & \tilde{H}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \\ \vdots \\ h_{nm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここでTは転置を表わし、 f, X, b 等は総て時刻 j での値を表わす。また、 $M(j) = M, L(j) = L$ と記せば、

$$\begin{aligned} f_{ng} &= \sum_{\alpha=j-N'}^{j+N'} [x_n(\alpha)x_g(\alpha-1), x_n(\alpha)x_g(\alpha-2), \dots, x_n(\alpha)x_g(\alpha-M)]^T \\ b_{np} &= [b_{np}(1, j), b_{np}(2, j), \dots, b_{np}(M, j)]^T \\ h_{np} &= [h_{np}(1, j), h_{np}(2, j), \dots, h_{np}(L, j)]^T \\ \tilde{h}_{ng} &= [\tilde{h}_{ng}(1, j), \tilde{h}_{ng}(2, j), \dots, \tilde{h}_{ng}(L, j)]^T \\ X_{p'p} &= \sum_{\alpha=j-N'}^{j+N'} \begin{bmatrix} x_p(\alpha-1)x_{p'}(\alpha-1) & x_p(\alpha-2)x_{p'}(\alpha-1) & \cdots & x_p(\alpha-M)x_{p'}(\alpha-1) \\ x_p(\alpha-1)x_{p'}(\alpha-2) & x_p(\alpha-2)x_{p'}(\alpha-2) & \cdots & x_p(\alpha-M)x_{p'}(\alpha-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p(\alpha-1)x_{p'}(\alpha-M) & x_p(\alpha-2)x_{p'}(\alpha-M) & \cdots & x_p(\alpha-M)x_{p'}(\alpha-M) \end{bmatrix} \\ \tilde{H}_{gp} &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{gp}(0, j-1) & \tilde{h}_{gp}(1, j-1) & \cdots & \tilde{h}_{gp}(L-1, j-1) \\ \tilde{h}_{gp}(-1, j-2) & \tilde{h}_{gp}(0, j-2) & \cdots & \tilde{h}_{gp}(L-2, j-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{gp}(1-M, j-M) & \tilde{h}_{gp}(2-M, j-M) & \cdots & \tilde{h}_{gp}(L-M, j-M) \end{bmatrix} \\ \tilde{\sigma}_{p'p}^2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{p'p}^2(j-1) & & & 0 \\ & \tilde{\sigma}_{p'p}^2(j-2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{\sigma}_{p'p}^2(j-L) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式(1)の係数 $\tilde{a}_{gp}(k, j)$ および $\tilde{h}_{ip}(k, j)$ は上記式(10),(11)より推定することができる。以上ARMAモデルの同定法について述べたが、これとほぼ同一の方法で多次元定常ARMAモデルの同定法を提案し、非定常性は時系列データに長方形ウィンドウを乗じて求めたデータ列より係数を求め、これをウィンドウ中央点における非定常時系列の推定値とした研究がある³⁾。ところで、式(1)の入力 $a_i(j)$ は次式より求めることができる。

$$a_i(j) = \begin{bmatrix} a_1(j) \\ a_2(j) \\ \vdots \\ a_m(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(j) & & & 0 \\ C_{21}(j) & C_{22}(j) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{m1}(j) & C_{m2}(j) & \cdots & C_{mm}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(j) \\ \xi_2(j) \\ \vdots \\ \xi_m(j) \end{bmatrix} = C(j) \xi(j) \quad (12)$$

ここで、 $\xi_i(j)$ は平均値0、分散1の互いに独立な乱数である。また、

$$C(j)C(j)^T = E[a_i(j)a_i(j)^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(j) & \sigma_{12}^2(j) & \cdots & \sigma_{1m}^2(j) \\ \sigma_{21}^2(j) & \sigma_{22}^2(j) & \cdots & \sigma_{2m}^2(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2(j) & \sigma_{m2}^2(j) & \cdots & \sigma_{mm}^2(j) \end{bmatrix} = \sigma(j) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^2(j) &= \frac{1}{2N'} \sum_{\alpha=j-N'}^{j+N'} \left\{ x_i(\alpha) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{a}_{ip}(k, \alpha) x_p(\alpha-k) \right\} \left\{ x_j(\alpha) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{a}_{jp}(k, \alpha) x_p(\alpha-k) \right\} \\ &+ \sum_{p=1}^m \sum_{p'=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \left[\tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k) \left\{ \tilde{h}_{ip}(k', j) \tilde{h}_{jp}(k', j) - \tilde{h}_{gp}(k', j) \tilde{h}_{gp}(k', j) - \tilde{h}_{ip}(k', j) \tilde{h}_{gp}(k', j) \right\} \right. \\ &\left. + \sum_{p'=1}^m \sum_{k'=1}^{M(j)} \tilde{\sigma}_{p'p}^2(j-k) \tilde{h}_{pp'}(k'-k, j-k) \left\{ \tilde{a}_{ip}(k, j) \tilde{h}_{gp}(k', j) + \tilde{a}_{jp}(k, j) \tilde{h}_{ip}(k', j) \right\} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

3. 非定常相互スペクトル

文献1と同様にして求めれば、多次元非定常ARMA過程に対する非定常相互スペクトルは次式で表わされる。

$$S_x(\omega, j) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, j) & S_{12}(\omega, j) & \dots & S_{1m}(\omega, j) \\ S_{21}(\omega, j) & S_{22}(\omega, j) & \dots & S_{2m}(\omega, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega, j) & S_{m2}(\omega, j) & \dots & S_{mm}(\omega, j) \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{2\pi} \mathbf{D}^{-1}(\omega, j) \mathbf{G}(\omega, j) \boldsymbol{\sigma}(j) \mathbf{G}^*(\omega, j) \{\mathbf{D}^*(\omega, j)\}^{-1}$$

ここで、

$$\mathbf{D}(\omega, j) = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^{M(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} c_{11}(k, j) & c_{12}(k, j) & \dots & c_{1m}(k, j) \\ c_{21}(k, j) & c_{22}(k, j) & \dots & c_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(k, j) & c_{m2}(k, j) & \dots & c_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\omega, j) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{L(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} h_{11}(k, j) & h_{12}(k, j) & \dots & h_{1m}(k, j) \\ h_{21}(k, j) & h_{22}(k, j) & \dots & h_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(k, j) & h_{m2}(k, j) & \dots & h_{mm}(k, j) \end{bmatrix} \quad (i^2 = -1)$$

また、*は共役複素数を表わし、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。 $\boldsymbol{\sigma}(j)$ は式(13)で与えられる。

4. 数値計算例

数値計算に用いた波形は文献4による互いに相関を有する多次元非定常確率過程のシミュレーション法を用いて作成した3次元非定常波形である(図-1(a),以後原波形と呼ぶ)。

ARMAモデルの次数は若干の数値計算を行ない、その結果を検討して最終的に $M(j)=2$, $L(j)=1$, $N=40$ とした。原波形にARMAモデルをあてはめて推定した係数の一部を図-2(a)に示しスペクトル、コヒーレンスおよび位相角の一部をそれぞれ図-3~6の(a)に示す。図-1~6の(b)は原波形より推定した係数(図-2(a))を用い式(1)より作成したシミュレーション波形(図-1(b))とそのスペクトル、コヒーレンス等である。なお図中の添字1~3は波形番号を表わす。

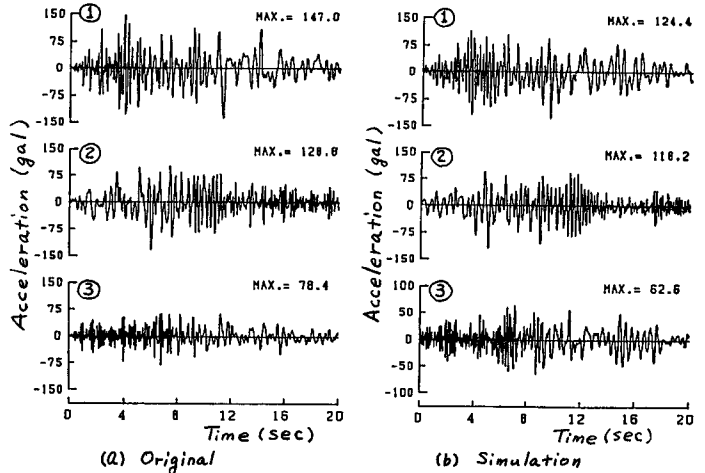


図-1 加速度波形

図の(a), (b)の比較よりARMA(2,1)次という低次のモデルにもかかわらず波形の有する非定常特性を良く捉えていることがわかる。また、次数を多少変化させてもそれほど大きな変化は表われず安定した傾向を示した。すなわち、本報告で提案したモデルの同定法の妥当性および非定常相互スペクトル解析法の妥当性が示されたものと思われる。

<参考文献>

- 1) Hoshiya, Chiba; Proc. of JSCE, 1980. 4
- 2) Gersch et al, EMS, ASCE, 1976. 10
- 3) 土岐・佐藤・江尻, 京大防災研年報, 1980. 4
- 4) 星谷・磯山, 土木学会論文報告集, 1978. 1

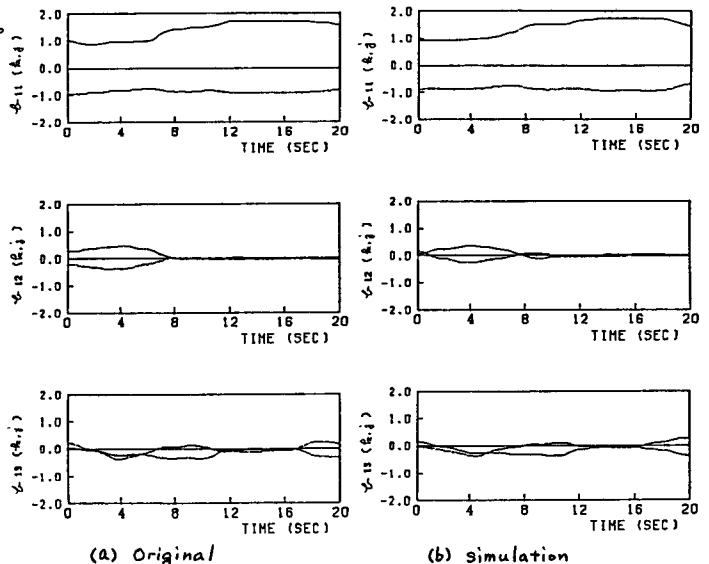
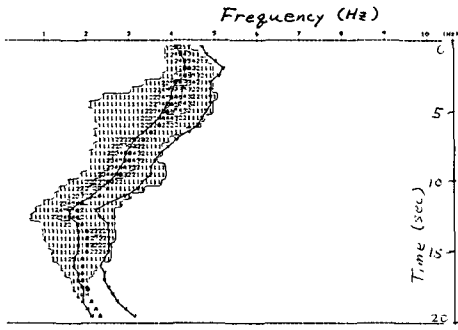
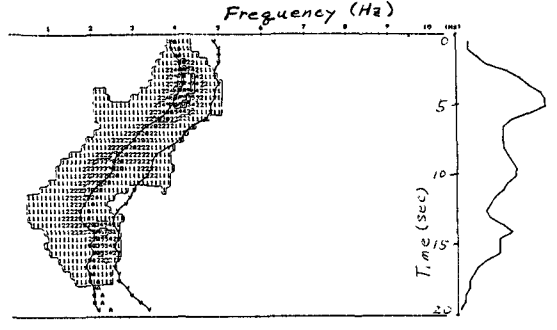


図-2 ARMA係数 $c_{1g}(k, j)$

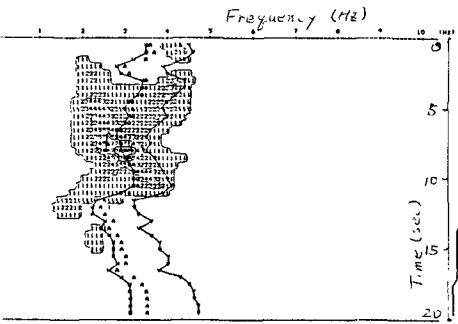


(a) Original

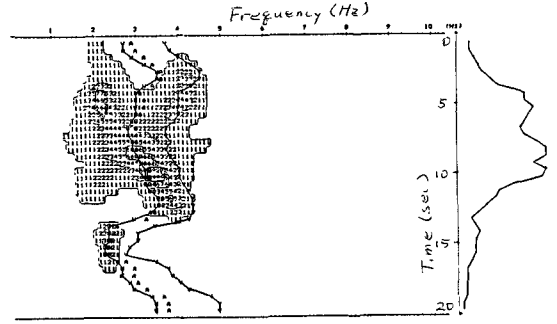


(b) Simulation

図-3 非定常スペクトル $|S_{11}(\omega, j)|$

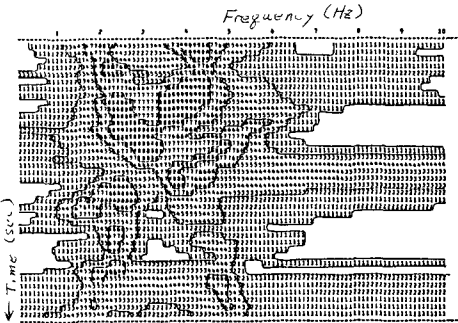


(a) Original

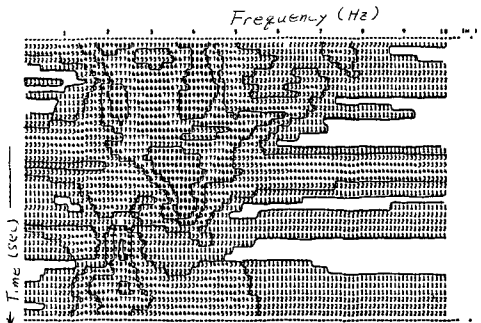


(b) Simulation

図-4 相互スペクトル $|S_{12}(\omega, j)|$

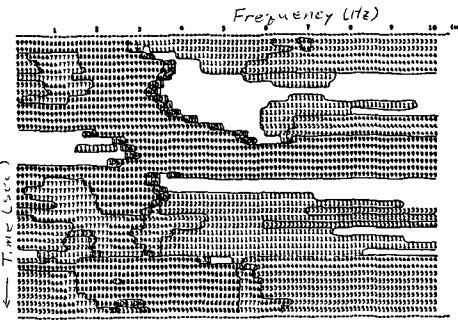


(a) Original

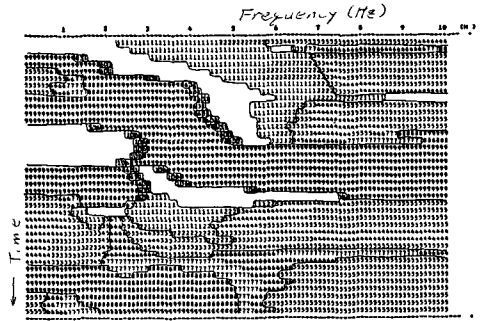


(b) Simulation

図-5 コヒーレンス $\gamma_{12}(\omega, j)$... 0~1を10等分して表示



(a) Original



(b) Simulation

図-6 位相角 $\theta_{12}(\omega, j)$... 0~2πを10等分して表示