

(5) 半無限体内部の球状加振力による変位の解析

神戸大学 大学院 学○高谷富也

神戸大学 工学部 正 北村泰寿

神戸大学 工学部 正 桜井春輔

1. まえがき

地中内部の加振源による波動伝播問題については、地震波動に関する研究分野において古くからすぐれた研究がみられる。また、近年においても、松岡ら [1]，筆者ら [2]，[3] によって地中内部の加振問題が再び取り上げられている。松岡らの研究は、半無限弾性体内部の点加振による変位・応力解を鏡像の原理を用いて、変位ポテンシャルと全無限弾性体における定常解の素解の重ね合せによって誘導している。一方、筆者らの研究は、半無限弾性体内部の加振位置に仮想の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層弾性体にモデル化し、変位・応力の一般解のベクトル・マトリックス表現を用いた一種の伝達マトリックス法による解法を提案している。とくに、これらの研究において、計算機の利用によって加振源近傍の挙動を容易に解析できる点は過去の研究を一步進めたものである。

本研究は、地中発破による地表および地中の挙動を解析する第一歩として、半無限弾性体内部の調和型の球状加振力による表面の変位解の誘導と若干の数値計算例を示したものである。なお、紙面の都合上、変位解の誘導に対する詳細な記述は省略するが、前掲の [2]，[3] における定式化と本質的に変わるものではない。

2. 変位解の誘導

図-1 のように半無限弾性体内部に半径 r_0 の球状加振力 $q_0 \exp(i\omega t)$ が作用する場合の変位解は、図-2，3 に示されている円周上の上下および水平の線状加振力による変位解を合成して得られる。この線状加振力に対する変位解については、鏡像の原理を利用した誘導が松岡ら [4] によっても示されているが、本研究では前掲の文献 [2] の方法を用いて変位解の誘導を行う。なお、本研究は調和振動を対象としているため、以下の記述においては時間項 $\exp(i\omega t)$ の表示は省略する。

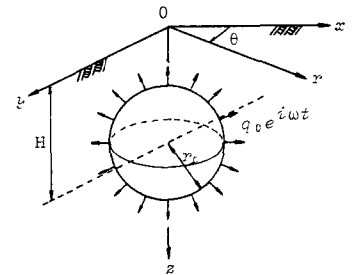


図-1 解析モデルと座標系

(1) 円周上の線状加振力による変位解

図-2，3 において、加振位置に線状加振力が作用する円周を含む仮想の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層弾性体にモデル化する。この解析モデルに対して、多層弾性体の分散関数の定式化に用いられている変位・応力のベクトル・マトリックス表現によるマトリックス積によって変位解を求める。さらに、半無限弾性体の場合にはマトリックス積の分解が容易であることから、ここではこの手順については省略するが、これらの式変形によって所要の変位解が得られる。

円周上の線状上下加振力 q_z による変位解は、加振力に対して Fourier-Bessel 積分公式を用いて次式のように誘導される。

$$u_{zr} = -\frac{q_z r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k^2 U_1(k)}{F(k)} + k^2 U_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_1(kr) dk \quad \cdots (1)$$

$$u_{zz} = -\frac{q_z r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k W_1(k)}{F(k)} + \frac{k W_2(k)}{BF(k)} + k W_3(k) \right\} J_0(kr_0) J_0(kr) dk \quad (2)$$

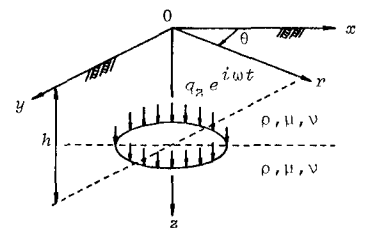


図-2 円周上の線状上下加振

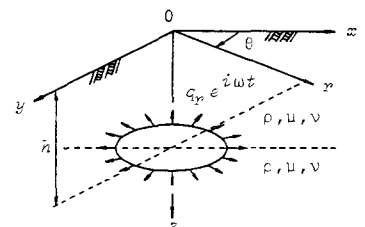


図-3 円周上の線状水平加振

一方、円周上の線状水平加振力 q_r による変位解は次式のように得られる。

$$u_{rr} = -\frac{q_r r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k H_1(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k}{\alpha} H_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_1(kr) dk \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$u_{rz} = -\frac{q_r r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k^2 V_1(k)}{F(k)} + k^2 V_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_0(kr) dk \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} U_1(k) &= (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2k^2 e^{-\beta h} \} + k_s^2 \{ 2\alpha\beta e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \} \\ U_2(k) &= -e^{-\alpha h} + e^{-\beta h} \\ W_1(k) &= -\alpha k_s^2 \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2k^2 e^{-\beta h} \} \\ W_2(k) &= -(k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) k^2 \{ 2\alpha\beta e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \} \\ W_3(k) &= \alpha e^{-\alpha h} - (k^2 / \beta) e^{-\beta h} \\ H_1(k) &= (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) k^2 \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2\alpha\beta e^{-\beta h} \} + \alpha\beta k_s^2 \{ 2k^2 e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \} \\ H_2(k) &= -k^2 e^{-\alpha h} + \alpha\beta e^{-\beta h} \\ V_1(k) &= -k_s^2 \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2\alpha\beta e^{-\beta h} \} - (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \{ 2k^2 e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \} \\ V_2(k) &= -e^{-\alpha h} + e^{-\beta h} = U_2(k) \\ F(k) &= (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2 \alpha\beta, \quad \alpha^2 = k^2 - k_p^2, \quad \beta^2 = k^2 - k_s^2, \quad k_p = \frac{\omega}{V_p}, \quad k_s = \frac{\omega}{V_s} \end{aligned}$$

また、 V_p, V_s はそれぞれ P 波および S 波の伝播速度、 μ はせん断弾性係数、 $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$ はそれぞれ 0 次、1 次の Bessel 関数である。

(2) 球状加振力 q_0 による変位解

球状加振力に対する変位解は、式(1)～(4)に示される円周上の線状加振力による変位解を合成して得られる。いま、図-4に示すように、球状加振力 q_0 を上下加振力成分 ($q_0 \sin \phi$) と水平加振と水平加振成分 ($q_0 \cos \phi$) に分けることによって、所要の球状加振力による変位解は次式のように求めることができる。

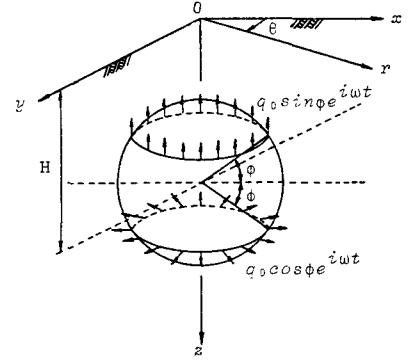


図-4 球状加振モデル

$$\begin{aligned} u_r = & -\frac{q_0}{2\mu r_0 k_s^2} \int_0^{r_0} \left[\int_0^\infty \{ x^2 X_1(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) \right. \\ & - (r_0 - x)^2 \tilde{X}_1(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \\ & + (x^2 - r_0^2) X_2(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) \\ & \left. + x(2r_0 - x) \tilde{X}_2(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \} J_1(kr) dk \right] dx \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z = & -\frac{q_0}{2\mu r_0 k_s^2} \int_0^{r_0} \left[\int_0^\infty \{ x^2 Y_1(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) - (r_0 - x)^2 \tilde{Y}_1(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \right. \\ & \left. + (x^2 - r_0^2) Y_2(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) + x(2r_0 - x) \tilde{Y}_2(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \} J_0(kr) dk \right] dx \quad (6) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \frac{k^2 \overline{U}_1(k)}{F(k)} + k^2 \overline{U}_2(k), & X_2(k) &= \frac{k \overline{H}_1(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k}{\alpha} \overline{H}_2(k) \\ Y_1(k) &= \frac{k \overline{W}_1(k)}{F(k)} + \frac{k \overline{W}_2(k)}{\beta F(k)} + k \overline{W}_3(k), & Y_2(k) &= \frac{k^2 \overline{V}_1(k)}{F(k)} + k^2 \overline{V}_2(k) \end{aligned}$$

なお、 $\overline{U}_1(k), \overline{U}_2(k), \dots$ は $U_1(k), U_2(k), \dots$ における h を $H+x$ で、また $\tilde{X}_1(k), \tilde{X}_2(k), \dots$ は $X_1(k), X_2(k), \dots$ における $\overline{U}_1(k), \overline{U}_2(k), \dots$ の $H+x$ を $H+x-r_0$ で置き換えたものを表す。

(3) 変位解の数値計算法

式(5)～(8)で与えられる球状加振による変位解の積分は数理的な変形によって求めることはできない。本研究では数値積分によって積分値の評価を行う。まず、積分変数 x に関する有限積分については適当なきざみ幅で数値計算を行う。一方、積分変数 k に関する無限積分は、被積分関数の分母が $F(k)=0$ となるレーレ極を有する。このため、同種の積分に対しては、直接数値積分法、適当な数理的変形を加えた後に数値積分する方法など（文献名略）がみられるが、ここでは直接数値積分法を適用した。すなわち、変位解を Cauchy の主値積分とレーレ極に対する留数の $-i\pi$ 倍の和として表し、主値積分については極の近傍で積分きざみ幅を小さくする不等間隔きざみ幅で数値積分を行う。なお、この積分きざみ幅については、筆者らが文献[2]で採用したものをを用いており、その詳細については省略する。

3. 数値計算結果および考察

球状加振による変位解の数値計算結果は次式の形で整理し、それぞれの無次元係数項で図示する。

$$u_r = -\frac{q_0 H}{2\mu} (e_1 + i e_2) \quad , \quad u_z = -\frac{q_0 H}{2\mu} (f_1 + i f_2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

また、参考のため、本研究では球状加振による変位とともに上下点加振による水平変位および上下変位も示す。この上下点加振による変位は文献[2]に得られている変位解を数値計算したもので、球状加振による変位解と比較するため、式(7)の形に補正して図示したものである。計算条件はポアソン比を $\nu=1/3$ 、球状加振の半径を $r_0/H=0.1$ とし、無次元加振振動数 $a_0 (= \omega r_0 / V_s)$ を $a_0=0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ の値に変化させた。

図-5は球状加振による表面水平変位と上下点加振による表面水平変位の比較を、また図-6は球状加振による表面上下変位と上下点加振による表面上下変位の比較を示したものである。なお、無次元加振振動数 a_0 が $0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ は、S波の波長を L とすれば、 $r_0/H=0.1$ なる計算条件より加振深さがそれぞれ約 $0.08L, 0.16L, 0.32L, 0.8L$ の位置にあることを意味している。

図-5, 6ともに、 $a_0=0.5$ の場合には $r/H=3$ 程度以遠では両者の変位挙動は一致する傾向にある。いま、両図の横軸 r/H を r/L に換算すると、 $a_0=0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ に対応する図はそれぞれ $r/L=0.4, 0.8, 1.6, 4.0$ なる距離までの変位挙動を調べたことになる。したがって、球状加振と点加振による変位挙動の差異は、加振源深さ H に関するものではなく、た

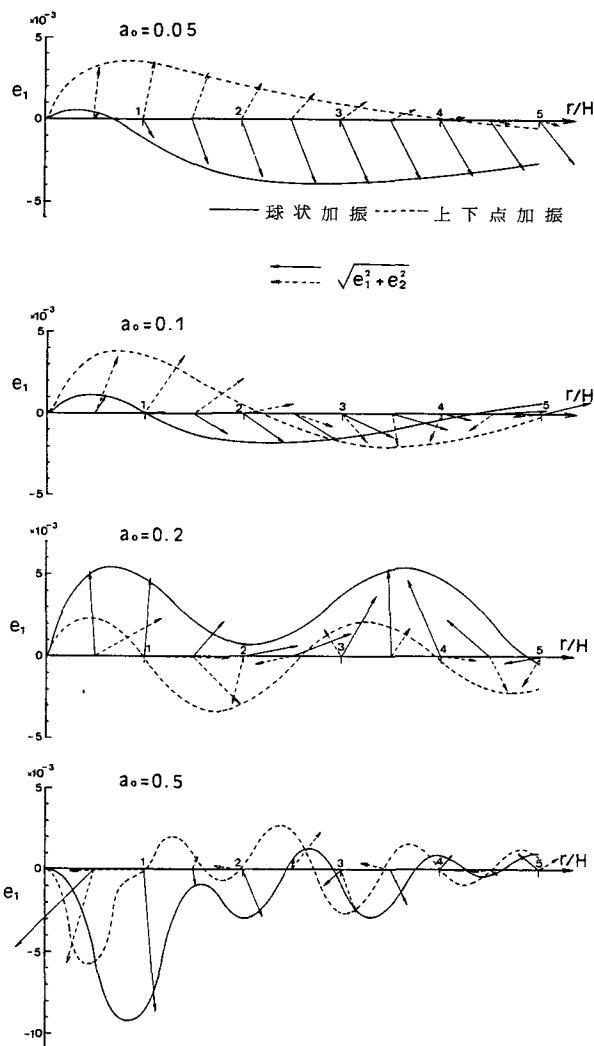


図-5 水平変位 u_r

たとえばS波の波長のように伝播する波動の波長に依存しているものと考えられる。また、球状加振と点加振の加振源の違いによる影響は、 r/L が小さくなるとともに（図は r/H に対して図示しているため、 $r/L=(r/H)*(H/L)$ なる換算を施す）顕著である。とくに、この違いは、図-5の水平変位 U_r よりも図-6の上下変位 U_z においてより顕著である。しかし、この場合にも表面に沿って伝播する波の波長は一致している。なお、筆者らは点加振と等分布加振による変位の比較（たとえば、文献[3]）においても同様の傾向を得ている。

4. あとがき

本研究では、半無限弾性体を同じ力学定数をもつ仮想の二層弾性体と考え、仮想の境界面上に円周上の線状加振力が作用するときの変位解を求めた。さらに、この変位解を用いて球状加振による表面変位解の誘導を行い、弾性体表面の変位挙動について若干の数値計算と考察を加えたものである。なお、本研究においては、球状加振の半径 r_0 と加振深さ H の比は1つのケースとし、加振振動数 a_0 が4つの場合について示したが、今後さらに各パラメータを変化させて、表面および内部の変位挙動について検討を進める予定である。

参考文献

- [1] たとえば、松岡 理，八幡夏恵子：第5回日本地震工学シンポジウム，pp.425～432，1978.
- [2] 高谷富也，北村泰寿，桜井春輔：建設工学研究所報告，第24号，pp.33～54，1982.
- [3] 高谷富也，北村泰寿，桜井春輔：第6回日本地震工学シンポジウム，pp.1609～1616，1982.
- [4] 松岡 理，松井徹哉 他：日本建築学会大会学術講演梗概集，pp.523～526，1980.

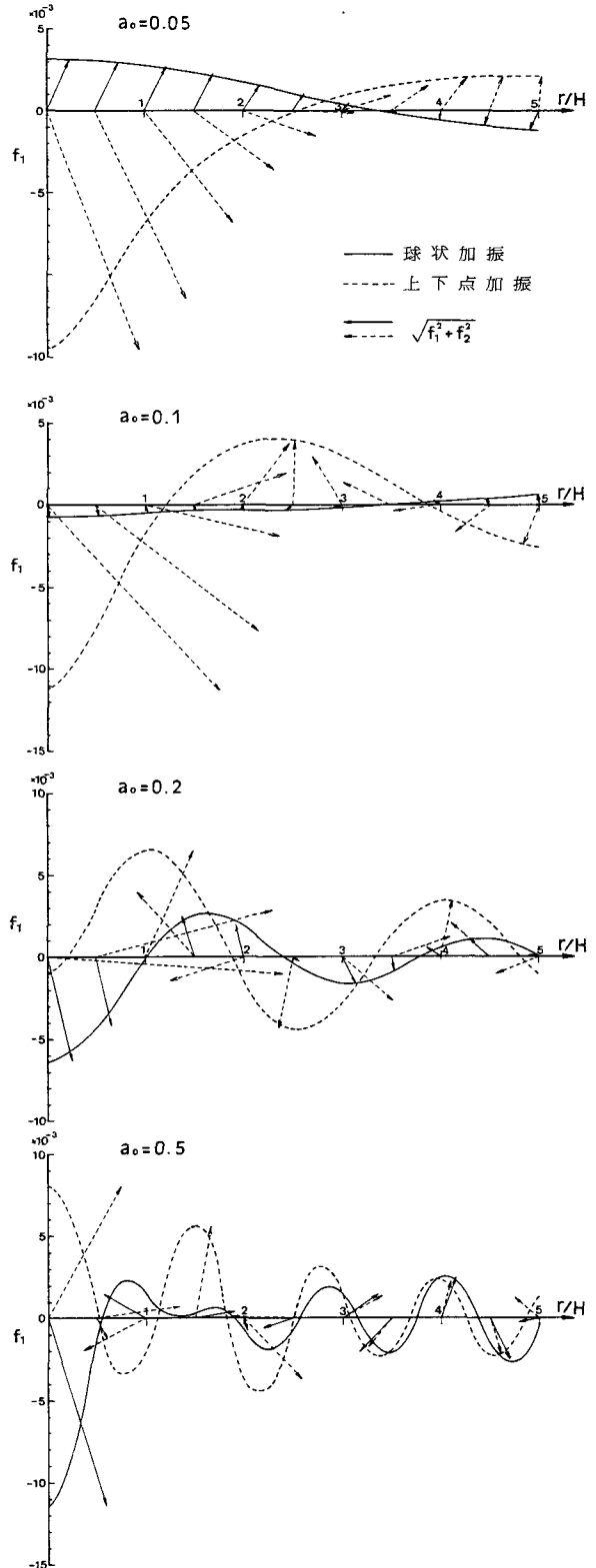


図-6 上下変位 U_z