

(64) 円筒形液体タンクの鉛直加振によるバルジング振動の解析

川崎重工業 坂井 藤一 (正), 小川 浩 (正), 磯江 暁

1. まえがき

液体タンクの耐震安全性を検討するには、まずその振動性状を明確にする必要がある。著者等は、この観点から従来の剛なタンクモデルに代る柔なタンクモデルの適用に着目し、有限要素法によるシェール-液体系の流力弾性振動解析を実施して、タンク柔性の影響の重要性を指摘してきた。著者等は、これをタンク耐震設計上バルジング問題と呼んでいるが、この場合タンクはビームではなく、本質的にシェールとしての扱いが要求される。本論は、以前発表した円筒タンクの水平加振入力応答解析にひきつづき、円筒液体タンクの鉛直加振によるバルジング振動解析に関する報告である。ここでは、まず固有振動解析を行なった後、名々の固有モードを用いるモード解析を行なっている。モード解析に関してはFEMを用いることにしているが、固有振動数の計算に対してはベッセル函数を用いる手法、フーリエ級数を用いる手法、FEMを用いる手法の3通りを実施し、解析の簡易化についても考察を行なった。

解析上の仮定は次の通りである。

- (1) 円筒タンクは、鉛直軸回りに完全な軸対称問題として扱う。
- (2) 内容液は、非圧縮性、非粘性の渦無し流れとする。
- (3) シェールは十分薄いものとし、膜理論を適用する。

2. 基礎方程式

2.1 微分方程式と境界条件

対象とする円筒タンクを図1に示す。座標軸として、 z 軸、 r 軸をとり、 w 、 u をそれぞれ、半径方向、鉛直方向の変位とすると、解くべき方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 & \text{in } V & (1) \\ \phi &= 0 & \text{on } S_f & (2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \dot{z} & \text{on } S_v & (3) \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \dot{w} & \text{on } S_s & (4) \\ -\rho \dot{\phi} &= \tau \rho_1 \dot{w} + \frac{E\tau}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4}{D^2} w \right) & \text{on } S_s & (5) \\ 0 &= \tau \rho_1 \ddot{u} - \frac{E\tau}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & \text{on } S_s & (6) \\ u &= \dot{z} & \text{at } z=0 & (7) \\ w &= 0 & \text{at } z=0 & (8) \\ \phi &= 0 & \text{at } z=H' & (9) \end{aligned}$$

ただし、 ρ ；液体の密度、 ρ_1 ；シェールの密度、 τ ；シェールの厚さ、 D ；シェールの直径、 H ；液の深さ、 H' ；シェールの高さ、 E ；ヤング率、 ν ；ポアソン比、 $\dot{z}$ ；底面の鉛直方向変位とする。

2.2 変分原理

上に示した連立方程式の厳密解を求めるのは困難なので、この問題を等価な汎函数の停留値問題へと置き換え、それに基づいて近似解を求める。この場合の汎函数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T L dt &= \int_{T_0}^T \left[\frac{\rho_1}{2} \int_{S_s} \tau (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) ds - \frac{E\tau}{2(1-\nu^2)} \int_{S_s} \left\{ \frac{4\nu w}{D} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4}{D^2} w^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{2} \int_V \text{grad}^2 \phi dV - \int_{S_s} \rho \dot{z} \phi ds + \int_{S_s} \rho \dot{w} \phi ds \right] dt \end{aligned} \quad (10)$$

上の汎函数の変分をと、よめれば、この汎函数の停留値問題が、(1)~(9)の連立方程式と等価であることが

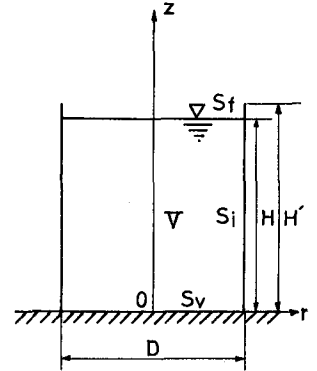


図1. 解析モデル

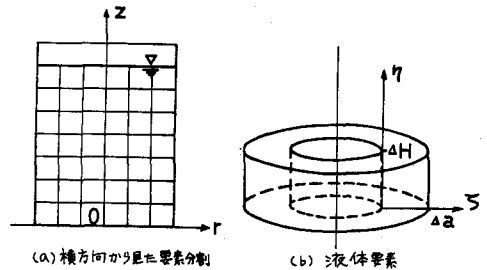


図2. FEMにおける要素分割と液体要素

確められる。

3. 有限要素法による解

3.1 変数の近似関数

液体、シェルを図2(a)に示すように、鉛直軸と垂直な面により分割し、液体部分にフリエはさらに半径方向にフリエを分割する。すなわち、液体要素は図2(b)に示すような形になり、各要素に対して、軸方向に η 、半径方向に r の局部座標を設けている。シェルの変位 w 、 u 、および流体の速度ポテンシャル ϕ は各要素内で線形分布していると仮定すれば、 w 、 u は η の関数、 ϕ は r と η の関数として、次のように表わされる。

$$\phi(r, \eta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{r}{\Delta r} \\ \frac{\eta}{\Delta \eta} \\ \frac{r}{\Delta r} \frac{\eta}{\Delta \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{m,n} \\ \phi_{m+1,n} \\ \phi_{m,n+1} \\ \phi_{m+1,n+1} \end{Bmatrix}$$

$$w(\eta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_n \\ w_{n+1} \end{Bmatrix} \quad u(\eta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 Δr 、 $\Delta \eta$ は、それぞれリング要素の幅と高さを表わす。

3.2 運動方程式

前節で示したような要素を用いて、この問題を離散化してみると、得られる釣り合い方程式は次のようになる。

$$-2\pi\rho [A1] \{\dot{\phi}\} + 2\pi\rho \dot{\bar{z}} \begin{Bmatrix} A2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \pi\rho D \begin{Bmatrix} A3 \\ 0 \end{Bmatrix} \{w\} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\pi\rho D}{2} \begin{Bmatrix} A4 & 0 \\ 0 & A4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \frac{\pi E D}{(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} A5 & \frac{\nu}{D} A6 \\ \frac{\nu}{D} A6^T & A4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$$+ \pi\rho D \begin{Bmatrix} 0 \\ A3^T \end{Bmatrix} \{\dot{\phi}\}_{s.} = 0 \quad (13)$$

この連立方程式を、 $\{u\} = \bar{z} \{1 \dots 1\}^T$ と仮定して解く。

4. ベッセル函数を用いる方法

ラプラスの方程式の一般解として知られるベッセル函数を利用して、この問題を解析する。(6)式において $\ddot{u} = 0$ として加速度の項を無視すると、変数 ϕ 、 w 、 u を次のように仮定することができる。

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(n, r) \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{H} z \quad (14)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi}{H} z \quad (15)$$

$$u = \int_0^z (-\frac{2\rho}{\pi D} w) dz + \bar{z} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\rho H}{\pi D} \frac{b_m}{m} \cos \frac{m\pi}{H} z \right]_0^z + \bar{z} \quad (16)$$

$$J_0(n, r) = I_0\left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{H} r\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2H} r \right\}^{2k}}{(k!)^2} \quad (17)$$

ここで仮定した ϕ は、境界条件(2)、(3)を満たす方程式(1)の一般解となり、 z は、 z 、函数 u の第3項は次のように書き直される。

$$\frac{2\rho}{\pi} \int_V \text{grad}^2 \phi dV = -\frac{2\rho}{\pi} \int_V \nabla^2 \phi \cdot \phi dV + \frac{2\rho}{\pi} \int_S \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{2\rho}{\pi} \int_S \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (18)$$

このように仮定した変数を用いて汎函数を計算し、その汎函数の停留条件として最終的に得られる離散化された

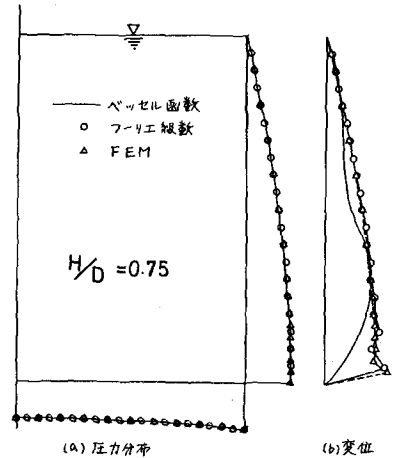


図3. 固有振動の圧力分布と変位のモード

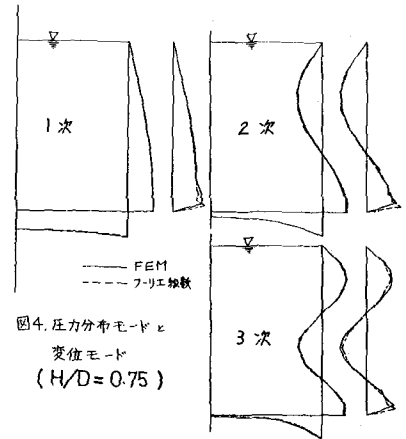


図4. 圧力分布モードと変位モード (H/D = 0.75)

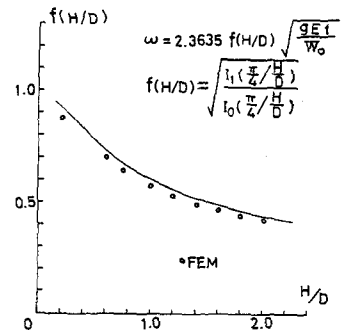


図5. 鉛直バルジング基本振動数の簡略解

釣り合い方程式は、次のようになる。

$$(\frac{1}{2}M_T[E] + M_0 \frac{1}{\pi} [B][\xi']^T [B]^T) \{B\} + K[E]\{B\} = 0 \quad (19)$$

ただし、 M_T : シェルの全質量、 M_0 : 液体の全質量、 γ : $\frac{1}{2} \frac{D}{H}$ 、 K : $\frac{2\pi E H^3}{D}$

$$\left. \begin{aligned} [B] &= \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \xi_0 \left(\frac{1}{1+\gamma+1/2} + \frac{1}{1-\gamma-1/2} \right) & \dots & \xi_n \left(\frac{1}{1+N+1/2} + \frac{1}{1-N-1/2} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0 \left(\frac{1}{M+0+1/2} + \frac{1}{M-0-1/2} \right) & \dots & \xi_n \left(\frac{1}{M+N+1/2} + \frac{1}{M-N-1/2} \right) \end{bmatrix} \\ [\xi'] &= \begin{bmatrix} \xi_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}, \quad \{B\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ \xi_n &= \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{I_0((n+\frac{1}{2})\pi \cdot D/2H)}{I_1((n+\frac{1}{2})\pi \cdot D/2H)}, \quad I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$\{B\}$ にかかっている係数の1項目はシェルの質量に起因するもの、2項目は液体の質量に起因するものである。一般にこの両者を比較すると、前者が後者に比べて非常に小さく、無視することができる。又、ベクトル $\{B\}$ を新たに、 $\{B\} = \{B'\} \sin \omega t$ とすると、(19) 式は次のように書ける。

$$(-M_0 \omega^2 \frac{1}{\pi} [B][\xi']^T [B]^T + K[E]) \{B'\} \sin \omega t = 0 \quad (21)$$

円固有振動数 ω は $\{B'\} \sin \omega t$ の係数マトリックスのディターミナントを0とする ω として求まる。又、シェルの $\{B\} = \{B'\} \sin \omega t$ で振動するときの側壁における圧力分布 $P(z)$ は、次のように表わされる。

$$P(z) = -\rho \phi|_{z_2} = \sum_{n=0}^N C_n \sin \omega t \cdot \cos(n+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{H} z \quad (22)$$

$$\{C_0 \dots \dots C_N\}^T = \rho \frac{H \omega^2}{\pi} [B] \{B'\} \quad (23)$$

5. フーリエ級数を用いる解

液体の速度ポテンシャル ϕ をフーリエ級数に展開し、同様の計算をした。計算に際して仮定した変数 ϕ , w , u は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \cos \frac{n\pi}{D} r \sin \frac{m\pi}{2H} (z-H) \\ w &= \sum_{k=1}^K b_k \sin \frac{k\pi}{H} z \\ u &= \sum_{l=1}^L c_l \sin \frac{l\pi}{2H} z \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

6. 解析結果

各解法による結果の比較をモードについて示すと、図3, 4 のようになる。変位については各解法に若干の差が見られるが、圧力についてはほとんど一致している。特に、ベッセル函数を用いた方法に対して実際の計算を行なってみると、関数 ϕ の2項目以下は1次モードに関してほとんど影響を及ぼさないで、 ϕ に関しては1項、 w に対しては3項のみを考慮して解いてみると、次のように表わすことができる(図5)。

$$\omega_0 = 2.3635 f(H/D) \sqrt{gE/\omega_0} \quad (25)$$

ただし、 $f(H/D) = \sqrt{I_1(\pi/4g)/I_0(\pi/4g)}$, ω_0 : 液体の全重量, g : 重力加速度 である。この場合の1次固有振動モードを用い、外力の時間変化によらずシェルが1次モードで振動すると考えて、入力 z に対する圧力応答を求める式を導くと、次のようになる。

$$P(z) = 0.811 \rho H (\ddot{z}_1 + \ddot{z}) \cos \frac{\pi}{2H} z \quad (26)$$

ここで、 $\ddot{z}_1$ は1次モードの相対応答加速度である。すなわち、

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -\ddot{z} \quad (27)$$

又、固有振動数に対して、フーリエ級数、FEMを用いた計算結果との比較を表1に示した。

時刻歴解析において、各変位モードを、分離された運動方程式が次の形に書き表わせるように正規化する。

表1. タンクの固有振動数

H/D	0.2	0.75	2.0
D	86.0 m	25.7 m	18.5 m
H	17.2 m	19.3 m	37.1 m
t	0.025m	0.025m	0.025m
ベッセル函数	17.02	39.65	25.54
フーリエ級数			
第1モード	16.08	37.58	24.32
2	28.10	85.30	67.78
3	36.05	112.67	102.13
FEM			
第1モード	16.16	37.57	24.33
2	29.61	85.41	68.21
3	39.53	114.53	103.03

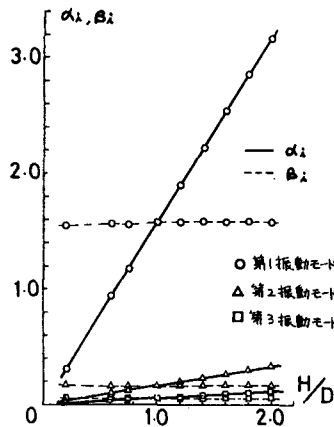


図6. アスペクト比に対する α_i, β_i

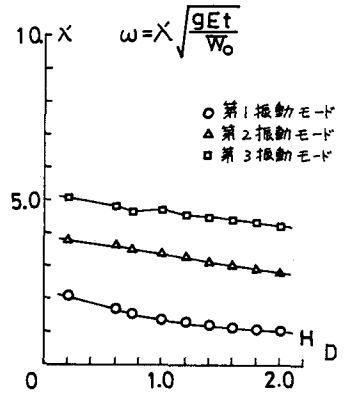


図7. アスペクト比に対する X

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = -\ddot{z} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\{W'\} = \sum_i \alpha_i B_i$$

このとき、圧力 P は次のように書き表わせる。

$$\{P\} = \rho \left(\frac{D}{2} \sum_i \{P_{B_i}\} \ddot{x}_i + \ddot{z} \{DZ\} \right)$$

(29) 式の後の項は、タンクを剛体とした場合の圧力分布を表わし(慣性圧)、前の項はタンクが柔であることにより生じる圧力を表わす(変形圧)。また(29)式は次のように書ける。

$$\{P\} = \frac{\rho D}{2} \sum_i (\alpha_i (H/D) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2H} z) (\ddot{x}_i + \ddot{z})$$

この α_i を何通りかのアスペクト比に対して計算した結果を図6に示す。又、 α_i をアスペクト比で割る、 β_i として、合わせて破線で書き込んである。(31)式は、又、 β_i を用いて次のように書ける。

$$P(z) = \frac{\rho H}{2} \sum_i \beta_i \cos \frac{(2i-1)\pi}{2H} z (\ddot{x}_i + \ddot{z})$$

FEM解析により得られた固有振動数を $\sqrt{\pi E t / M}$ で割る、無次元化した値 X を、図7に示す。

7. まとめ

以上により、FEMを用いた鉛直バルジング振動の解析法、およびアスペクト比による簡便な解析方法を示した。この鉛直バルジング振動は、円筒タンクの地震応答にかなりの影響を及ぼすものであり、耐震設計上これをどのように反映していくか、今後の問題である。

参考文献

- 1) 坂井, 迫田: 大型液体タンクの地震応答に関する研究, 第4回日本地震工学シンポジウム(昭和50.11)
- 2) 岡田, 坂井, 迫田: 有限要素法による大型液体タンクの地震応答解析, 川崎技報 59, 61号(昭和50.12, 51.6)
- 3) Sakai, Nishimura & Sakoda: Studies on Earthquake-Resistance of Liquefied Natural Gas Storage Tanks, Papers in LNG-6, Kyoto (April, 1980)
- 4) 坂井: 円筒形液体タンクの耐震設計法に関する二, 三の提案, 圧力技術第18巻第4号(昭和55.7)