

(30) 積分方程式法による不均一弾性体の動的解析

京都大学工学部 正 小林昭一
京都大学工学部 正 西村直志

1 序

本研究は、積分方程式法による積分変換型の非定常動弾性解析法、及び2, 3の数値例を示したものである。積分方程式法は地盤等の無限乃至は半無限領域での解析に用いた場合、仮想の有限境界からの反射波の影響を受ける事があり得ず、地震波動の解析に適している。定式化としては、積分変換型²⁾、Relaxed Potential 型の2通りが考えられるが、ここでは前者をとり、数値解析上の問題点について論ずる。特に、トンネル等の地下構造物の応答解析を想定し、不均一弾性体(=相物体)の外部問題を考察する。

2 定式化

図1に示す様な二相弾性体を考える。よく知られている様に、各物理量に $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$ (t : 時間) 型の Fourier 変換を施せば、問題は $e^{-i\omega t}$ 型の定常動弾性問題となる。そこで変位の F 変換を Green 公式を用いて(簡単のため「静置した面云々」を仮定、以下「F 変換」を省略)

$$u = \int_S T_e u dS - \int_S U_e t dS + u_z \quad \text{in } D_e \quad (1)$$

$$u = \int_S U_i t dS - \int_S T_i u dS + \int_{S_0} T_i v dS - \int_{S_0} U_i \Delta dS \quad \text{in } D_i \quad (2)$$

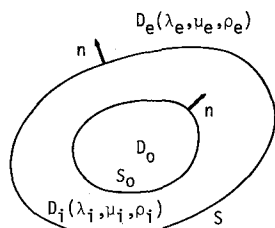


図1

と表示する。ここに $U_e(\omega)$, $T_e(\omega)$ は、 $D_e(\omega)$ に於ける一重層、二重層の核であり、2次元の場合

$$U_e(\omega)(x, y) = \frac{i}{4\pi\mu_e(\omega)} [H_0^{(1)}(k_{Te(\omega)} r) - \frac{1}{k_{Le(\omega)}^2} \nabla \nabla \{H_0^{(1)}(k_{Te(\omega)} r) - H_0^{(1)}(k_{Le(\omega)} r)\}]$$

$$T_e(\omega)(x, y) = U_e(\omega)(x, y) T_{e(\omega)y}, \quad T_{e(\omega)y} u(y) = \lambda_e(\omega) n \nabla_y \cdot u(y) + \mu_e(\omega) \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n} + \nabla_y u(y) \cdot n \right) \quad (3)$$

$k_{Te(\omega)}$, $k_{Le(\omega)}$; 波数, $r = |x - y|$

である。また、 u , t (v , Δ) は S (S_0) 上の変位及び表面力であり、 u_z は入射波である。式(1)(2)は、 u , t (u , t , v , Δ) が真の境界値の場合、 $D_e(\omega)$ で0になる事を考慮すれば、次の積分方程式を得る。

$$0 = C_0^e u + \int_S T_e u dS - \int_S U_e t dS + u_z \quad \text{on } S \quad (4)$$

$$0 = \int_S U_i t dS - C_0^i u - \int_S T_i u dS + \int_{S_0} T_i v dS - \int_{S_0} U_i \Delta dS \quad \text{on } S \quad (5)$$

$$0 = \int_S U_i t dS - \int_S T_i u dS + C_0^i v + \int_{S_0} T_i v dS - \int_{S_0} U_i \Delta dS \quad \text{on } S_0 \quad (6)$$

を得る。ここに C_0^e 等は二重層ポテンシャル $\int_S T_e u dS$ の内部極限の Free term 等であり、滑面の場合 $C_0^e = 1/2$, $C_0^i = -1/2$ である。また f は主値積分である。積分方程式④~⑥は、 S , S_0 を組合のよい曲面 S' , S'_0 に近似し、その上に代表点 z_i 、及び形状関数 Ω_i ($\Omega_i(\alpha_j) = 1$ ($i=j$), $=0$ ($i \neq j$)) を取って離散化され、数値的に解く事が可能になる。

3 数値解析上の問題点

2 で述べた方法を用いる場合いくつかの問題が生ずる。以下、それらの解決策について述べる。

1) 数値積分について： 式④～⑥に現われる積分のうち、特異積分は、外部、内部極限の別に応じて各々

$$0 = \int_S U_{tp} ds - c^0 u - \int_S T_{up} ds, \quad 0 = c^1 u_p + \int_{S(\infty)} T_{up} ds - \int_{S(\infty)} U_{tp} ds \quad (7)$$

を用いて評価すればよい。ここに u_p , t_p は平面波、及び対応する表面力である。他の積分は高々可積分のオーダーである。

2) 境界応力について： 境界応力を精度よく求めるためには、境界要素としてアイソパラメトリック (IP) 要素を用い、要素のパラメータを曲面の局所座標とみて共変偏分すればよい。特に二次元では簡単になり、

$$T_{\xi\xi} = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)a} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x_a}{\partial \xi} + \frac{\lambda\mu a t_a}{\lambda+2\mu}, \quad T_{\xi n} = \frac{1}{\sqrt{a}} t_a \frac{\partial x_a}{\partial \xi}$$

$$T_{nn} = \mu a t_a, \quad a = \frac{\partial x_a}{\partial \xi} \frac{\partial x_a}{\partial \xi} \quad (8)$$

となる。ここに μ は要素のパラメータ、 $x_a = x_a(\xi)$ は境界形状のパラメータ表示、 n は法線である。変位 u 、表面力 t_a 等は、cartesian座標成分でよい。

3) 基本解のけた落ちについて： 式④～⑥の U_{ei} , T_{ei} の積分は、IP 要素を用いる限り、数値積分によらざるを得ない。この場合、式⑤の形からも明らかな様に、特に小さい k の場合、 $\{ \}$ 内の項のためにけた落ちが生ずる。それゆえ、少なくとも小さい k に対しては Hankel 関数を級数展開し、不都合な項を除かねばならない。また、それだけの操作でけた落ちは完全に防止できる。低周波数域に於いては、 S S L 等の標準的プログラムによる Hankel 関数の計算を行うべきでない。

4) 境界の分割： 2 次の IP 要素を用いた場合、境界応力まで含めて高精度の解析を行なうには、 S 波 1 波当り 4 要素程度用いれば十分であろう。

5) 見かけ上の固有値現象について⁴⁾： 2 で扱った問題の解は一意的である事を示せるが、対応する積分方程式④～⑥は必ずしも一意解を有するとは限らない。実際、方程式④～⑥の解 u , t , v , μ が真の境界値であるためには、式④(②)が $De(i)$ で 0 になる事が必要十分であるが、一方、④～⑥は、式④(②)が $\partial De(i)$ で 0 になる事を示しているにすぎない。それゆえ、

(i) 振動数が D_e^0 の中に D_e と同じ物質を満たして得られる物体の変位境界値問題の固有値に等しいとき、

(ii) 振動数が D_0 の中に D_0 と同じ物質を満たして得られる物体の変位境界値問題の固有値に等しいとき、

には、式④～⑥の解の一意性が成立しなくなる事が予想される。実際、方程式④～⑥に対応する非自明解を具体的に書き下す事ができ、これらの振動数は確かに式④～⑥の一意性を成立たせない。このような現象を見かけの固有値現象という。このような現象は純粋に数学的なものであって、一切物理的意義を有せず、数値解析においては精度の悪化要因であるので注意せねばならない。従来から一層の音響物質中の波について、このような現象への対策がいくつか発表されているが¹⁾、数値的には必ずしも十分でなく、むしろこのような周波数に対する解析は避け、必要な場合には補間で評価するのがよいと考えられる。実際、実用上、非定常解析には士ほど高周波成分を要しない事も多く、そのため見かけ上の固有値の分布はごく疎である事、見かけ上の固有値にかなり近い周波数に於いても式④～⑥の精度は士ほど落ちない事、式④～⑥の数値的取扱いの容易さなどからの判断である。

見かけ上の固有値を検出するためには、少なくとも応力境界値問題では次の様にすればよい。まず、得られる係数行列を

$$x_i \in S \left(\left[\begin{array}{c|c} \left[\int_S T_{ei}(x_i, y) \Omega_j(y) ds \right]^{-1} & 0 \\ \hline - \int_S U_{ei}(x_i, y) \Omega_n(y) ds & \end{array} \right] \right) \left(u(x_i) \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_k \in S_0 \\ x_m \in S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \int_{S_0} T_i(x_k, y) \Omega_j(y) dS & \left[\int_{S_0} T_i(x_k, y) \Omega_l(y) dS \right] \\ - \left[\int_S T_i(x_m, y) \Omega_j(y) dS \right]^+ & \int_{S_0} T_i(x_m, y) \Omega_l(y) dS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_S U_i(x_k, y) \Omega_n(y) dS \\ \int_S U_i(x_m, y) \Omega_n(y) dS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x_0) \\ t(x_0) \end{pmatrix} \quad (9)$$

の様に並べる。こゝに⁺(⁻)は外(内)部極限である。一般に、見かけ上の固有値でない ω に対しては、⑨の行列はピボット・ニングなしでLU分解できる。その結果、四角で囲んだ部分の(Crout法であれば)Lの対角項の絶対値の最小値は、 ω によらずほぼ一定している。一方、見かけの固有値においては、この値が非常に小さくなる。この事に注意すれば、誤って見かけ上の固有値の影響を受けた解を採る事は防止できる。表1に円心円状の二相物体($E_i/E_e/E_p = E_i/E_e = 2/3$, E : Young率, $\nu_e = 1/6$, $\nu_i = 1/4$, 外径(a)/内径(b) = 1.2)についての適用例を示した。

以上の諸点に注意すれば、良好な精度で非定常解析を行なう事ができる。

4 数値解析例

上述の今までの適用例を以下に示す。まず精度のcheckとして一相の弾性体中の円孔に定常平面P、多波が入射した場合の周応力を図2, 3にそれぞれ示した。ポアソン比は各々、0.26, 0.25である。これらの結果はPao⁵⁾及びMow & Monte⁶⁾の結果とよく一致している。

次に図4に示すようなステップ波に対する応答計算を行なった。数値F変換にはFFT法を用いた。また図4に於ける t_0 は十分に大きくとり、立上り部の結果を既存の解と比較して図5, 6に示した。図5, 6は、各々ポアソン

$k_t a$	$\min L_{ii} $	固有値?
0	0.4427	X
3.204	0.5264×10^{-2}	0
3.250	0.3288	X
3.365	0.3677×10^{-2}	0
6.144	0.1340	0
6.400	0.3486	X
6.637	0.7511×10^{-4}	0

表1. 見かけ上の固有値の同定

(*) $J_{n+1}(k_t a) J_n(k_t a) + J_{n+1}(k_t a) J_n(k_t a) = 0$ の根が、半径aの円板の面内、周辺固定の固有値を与える。

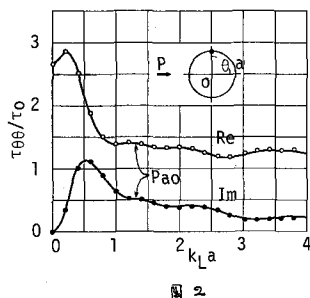


図2

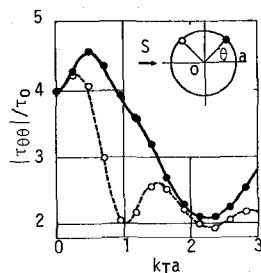


図3: 後: Mow & Monte⁶⁾

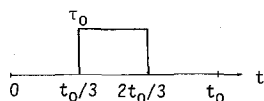
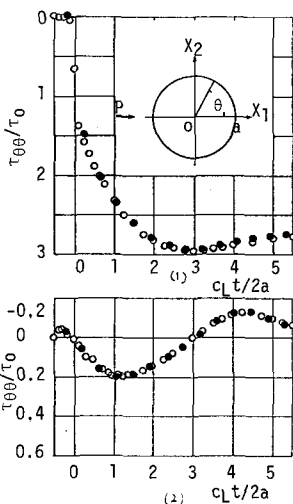


図4



(2)

比1/4の場合の平面P波に対する円孔上 $\theta = \pi/2, \pi$ での周応力、および周上での x_1 方向変位である。いずれも Garnet & Graessly-Pascal⁷⁾の結果とよく一致している。図6は、平面多波応答を求めたもの、ポアソン比は1/4である。藤木が Retarded Potential を用いて求めた結果とよく一致している。図7, 8はトンネルのステップ多波応答を

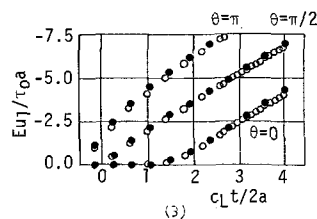


図5: ● BIE, ○ Garnet & Graessly-Pascal⁷⁾

求めたものである。(Young 率比 $E_i/E_e=5$, $\nu_e=1/4$, $\nu_i=1/6$, $\rho_e=\rho_i$) また、図8は地下発電所等に見

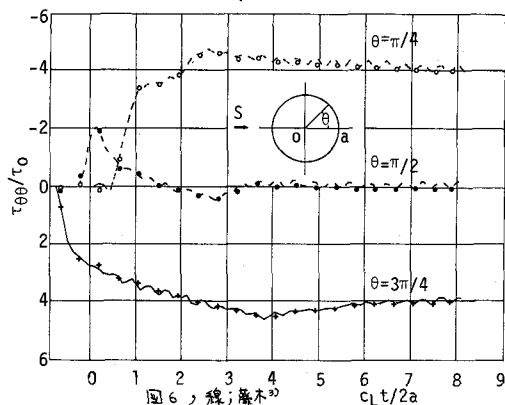


図6、線、藤木³⁾

られる実利形状のS波応答を求めたものである。

- 文献 1) Shaw, R.P.; Chapt. 6 In "Development in Boundary Element Methods-1", (Ed. R.K. Banerjee et al.), Appl. Sci. Publ. 1978. 2) 東; 京大修論, 1975.
3) 藤木; 京大修論, 1980. 4) 小林, 西村; 56年関西支部講義集, 1981. 5) Pao, Y.-S.; J. Appl. Mech., Vol. 29, 1962.
6) Mow, C.-C. & L.J. Mente; J. Appl. Mech., Vol. 30, 1963.
7) Garnet, H. & J. Crouzet-Pascal; J. Appl. Mech., Vol. 33, 1966

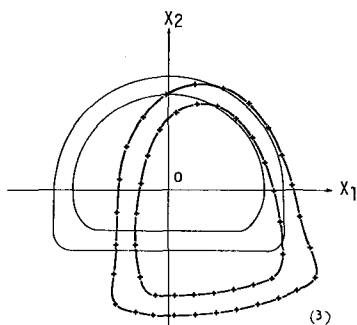
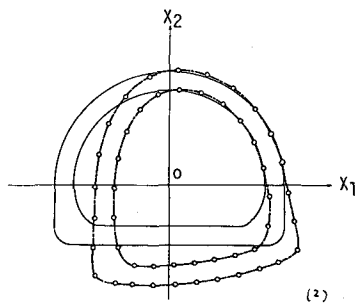
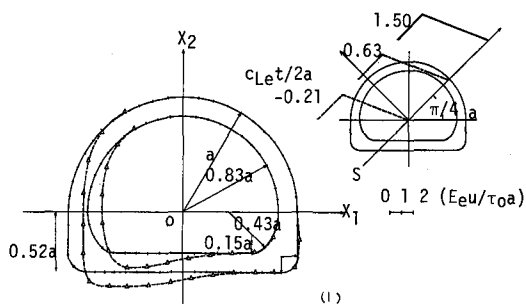


図7

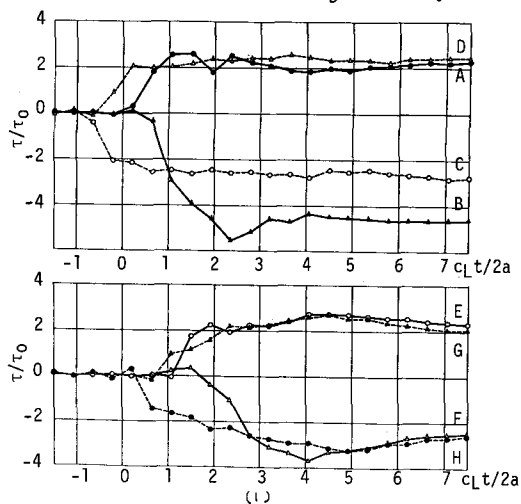
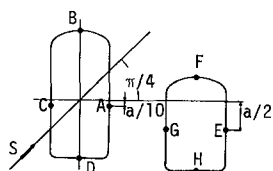


図8, (1)応力, (2)変形

