

(26) 非線形応力～ひずみモデルの等価線形化過程での誤差

(財) 電力中央研究所 国 生 剛 治

1. まえがき

地盤、土構造物、上部構造などの地震の応答を解析する場合、地盤材料や構造物材料の非線形応力ひずみ関係を適当なモデルにより定式化し、それを用いた非線形応答解析または等価線形解析を行なうことが考えられる。

非線形応答解析では非線形応力ひずみ関係の接線勾配を用いて各時間ステップごとの増分計算を行ない、応力ひずみ関係を直接追跡してゆくのにに対し、等価線形解析ではひとつの解析区間全体に対し代表的なひずみ振巾を推定し、その振巾での定常的な応力ひずみループから近似的な方法により算出される剛性と履歴減衰定数を用いて線形応答解析を行なうものである。非線形解析法は非線形物性関係を忠実に模擬するものであるから、物性の定式化の精度が高ければ解析値の信頼性は非常に高い。しかし、非線形解析では解析モデルの剛性マトリクスが逐一変化するので、直接積分法によらざるを得ず、解析の安定性などの面から莫大な計算量が要求され、自由度の大きなモデルには適用限界がある。一方、等価線形解析法は近似の方法ではありながら、線形解析の範囲にあるため、モード重ね合わせ法、複素応答法、軸対称振動解析など線形重ね合わせの原理に基づく効率の良い解析法すべてに適用でき、自由度の大きいモデルを用いた実際的な問題への適用性が高い。

近似的な等価線形解析を厳密な非線形解析と比べた場合の誤差の要因としては、有効なひずみ振巾を精度良く推定することの困難さが認識されている。ここではそれ以外に内在する問題点として、非線形応力ひずみループから等価線形物性を算出する過程で生ずる誤差について理論的検討を行なう。

2. 非線形ヒステリシスモデルと等価線形化

図・1に示すような非線形ヒステリシスループの等価なせん断剛性としては、通常、ループの2つの頂点AとBを結ぶ割線勾配の係数Gをとることが多い。また、等価な減衰定数hは1サイクル中の履歴面積 ΔW と最大のひずみエネルギーWから、図中の式により計算するのが通例である。

Jacobsen⁽¹⁾は非線形ループの履歴減衰定数はひずみエネルギーとしてWのかわりに応力～ひずみ骨格曲線の下側の面積が表わすエネルギーW'を用いるべきであるとしているが、実際にはWを用いる場合がほとんどである。意外なことに、これらの動的物性値の定義法には明確な理論的背景はなく、線形粘弾性応答とのアナロジーならびに多分に直感的に決められたものであると思われる。それにもかかわらず、これらの物性値の決め方について厳密な議論がされた例は、渡辺⁽²⁾のバイリニアールモデルについての研究を除いてはほとんど見られない。

ここでは、3種の代表的な応力ひずみモデルを対象として、通常の方法による剛性と減衰定数を精密解と比較することにより、その誤差を検討した。そのために以下の方法をとった。すなわち、定式化された応力～ひずみループについて、それをバネの復元力特性として持つ1自由度振動系

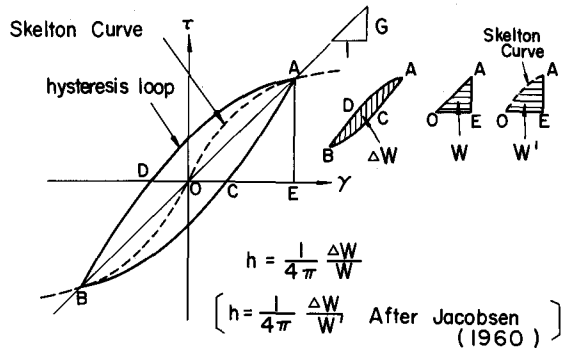


Fig. 1

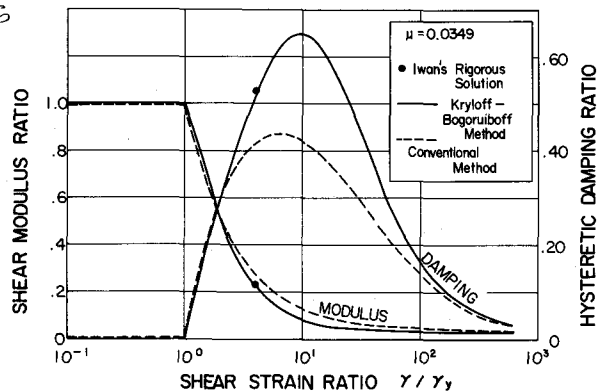


Fig. 2

の定常振動応答を Kryloff - Bogoruihoff 法 (以後 K - B 法と呼ぶ) により解き、共振点での振動数と増巾率からセン断剛性と減衰定数を逆算して、それを精密解と見なし、それを通常の方法による値と比較した。

(a) バイリニアールモデル

割線勾配によるバイリニアールモデルのセン断剛性は

$$\left. \begin{aligned} G/G_0 &= 1 & r < r_y \\ G/G_0 &= r_y/r + \mu(1 - r_y/r) & r > r_y \end{aligned} \right\} (1)$$

により表わされる。ここに、 $\mu = G_f/G_0$ (G_0 : 初期剛性、 G_f : 降伏後の剛性)、 r はひずみ振巾、 r_y は降伏ひずみである。また、通常の方法により求められる減衰定数は

$$\left. \begin{aligned} h &= 0 & r < r_y \\ h &= \frac{2}{\pi} \frac{(1-\mu)(r/r_y - 1)}{\mu(r/r_y - 1) + 1} \frac{r_y}{r} & r > r_y \end{aligned} \right\} (2)$$

である。これに対し、K - B 法により求められるセン断剛性 G^* は $r > r_y$ の場合次式となる。⁽²⁾⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{G^*}{G_0} &= 1 - (1-\mu) \left[1 - \frac{\theta^*}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta^* \right] \\ \theta^* &= \cos^{-1} \{ 1 - (2r_y/r) \} \end{aligned} \right\} (3)$$

また、K - B 法による減衰定数 h^* は $r > r_y$ の場合

$$h^* = \frac{2(1-\mu)(r_y/r) \{ 1 - (r_y/r) \}}{\pi G^*/G_0} \quad (4)$$

となる。式 (1) と (3) によるセン断剛性の比較を図・3に、式 (2) と (4) による減衰定数の比較を図・4に示す。これらより、割線剛性から求めたセン断剛性は K - B 法による剛性よりも $1 < r/r_y < 2$ では小さいが、 $r/r_y > 2$ では大きくなること、また、エネルギー比から求めた減衰定数は、K - B 法による減衰定数よりも $1 < r/r_y < 2$ では大きい、 $r/r_y > 2$ では小さくなること、がわかる。

図・5は通常の方法により求めた剛性と減衰定数を1とした場合、精密解と見なした K - B 法による剛性と減衰定数の相対値を示したものである。 $\mu = 0.02$ のような非線形性の非常に強い場合を除いては通常の等価線形化過程に含まれる誤差は大きくはなく $\mu = 0.1$ で 20~30% 程度であることがわかる。

ところで、K - B 法は完全な厳密解ではないが、バイリニアールモデルについては Iwan⁽⁴⁾ が数値積分により厳密解を求めているので、それと比較することにより K - B 法の精度が調べられる。図・2において、黒丸印で示す Iwan の解と式 (3)、(4) による K - B 法の解、さらに式 (1)、(2) による解が比較されている。 $\mu = 0.0349$ という非線形性の強い場合にもかかわらず、実線で示す K - B 法の解は厳密解の黒丸に非常に近く、破線で示す通常の等価線形物性値に比べてほぼ精密解と呼び得ることがわかる。

(b) Ramberg - Osgood モデル

このモデルは Jennings⁽⁵⁾ により詳細な検討がなされたが、モデル中に含まれるベキ乗数 $r (= \beta + 1)$ が、1以上の奇数である制限を設けていた。大崎一原⁽⁶⁾ らは β が任意の正数の場合について検討したが、その場合

$$\frac{r}{r_y} = \frac{\tau}{\tau_y} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^\beta \right) \quad (5)$$

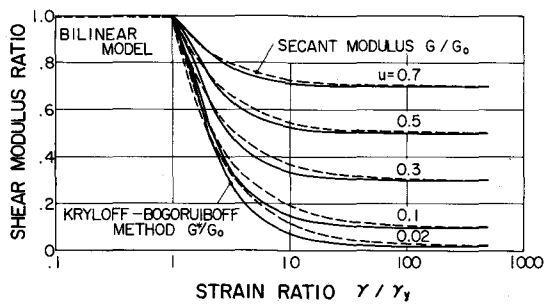


Fig. 3

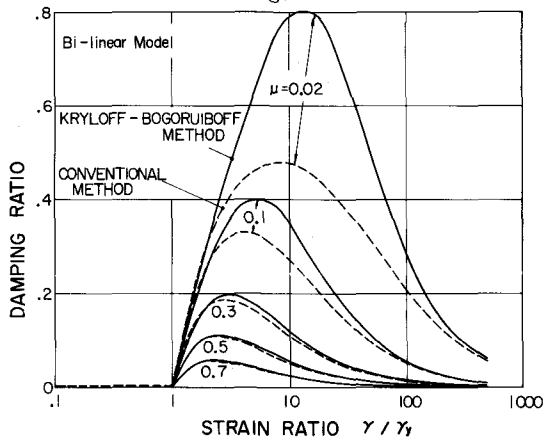


Fig. 4

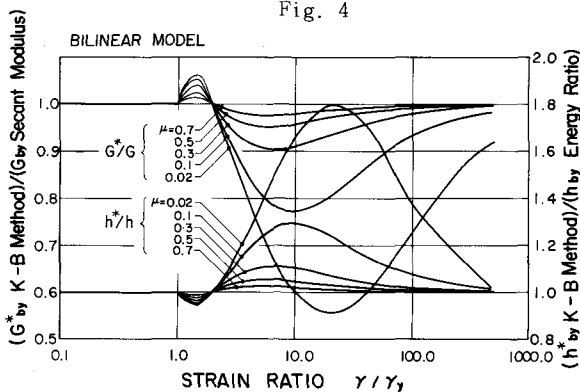


Fig. 5

が骨格曲線の式である。ここに τ はせん断応力, τ_y は降伏応力, r_y は降伏ひずみであり, 初期剛性を G_0 として, $\tau_y = G_0 r_y$ と表わされ, α, β は正の定数である。このモデルの履歴ループの割線剛性によるせん断剛性は次式となる。

$$G/G_0 = 1 / (1 + \alpha |\tau / \tau_y|^\beta) \quad (6)$$

また, 通常の方法による減衰定数は次式となる。

$$h = \frac{2}{\pi} \frac{\beta}{\beta + 2} \left(1 - \frac{G}{G_0}\right) \quad (7)$$

式(6), (7)と(5)を組み合わせることにより求めた剛性と減衰定数のひずみに対する変化を図・6に示す。一方, Jennings の研究⁽⁵⁾にならって, 非線形1自由度系の共振応答から求めた精密なせん断剛性 G^* と精密な減衰定数 h^* が算出されるが, それを $\alpha = 1$ の場合について示したのが図・7である。図・6に示す通常の方法により求めた剛性と減衰定数をそれぞれ1とした場合の図・7に示す精密値の相対的割合のひずみに対する変化を図・8に示す。このモデルでは砂質土に対しては $\beta = 1.8$ 程度, 粘性土に対してはさらに小さな β が適しているが, $\beta = 1.8$ では剛性と減衰定数の誤差は $r / r_y = 100$ に対して, せいぜい20~30% であることがわかる。

(c) 履歴型 Hardin - Drnevich モデル⁽⁷⁾

このモデルの骨格曲線は図・9(a)に示すように漸近値 τ_f を有しており,

$$\tau = \frac{G_0 r}{1 + |r / r_r|} \quad (8)$$

により表わされる。ここに G_0 は初期剛性, r_r は基準ひずみで $\tau_f = G_0 r_r$ の関係がある。従来の Hardin - Drnevich モデルが他のモデルに比べて不備な点は, その履歴ループが定式化されていないために, 非線形解析に用いられないことである。履歴型 Hardin - Drnevich モデルは Masing - Rule に従って, 骨格曲線を折り返し点を中心に2倍に相似拡大することにより図・9(a)のような履歴曲線を定めるもので, Finn ら⁽⁸⁾ も非線形液化化解析に用いている。

このモデルの割線剛性によるせん断剛性は

$$G/G_0 = 1 / \{1 + (r / r_r)\} \quad (9)$$

により与えられる。一方, エネルギーの比から計算される減衰定数は

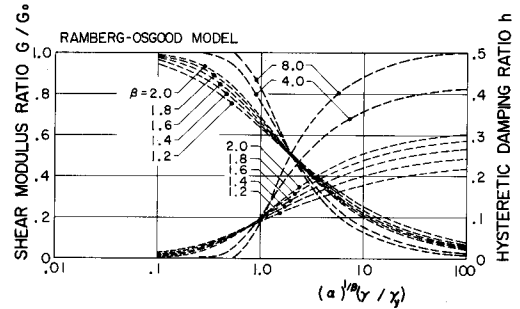


Fig. 6

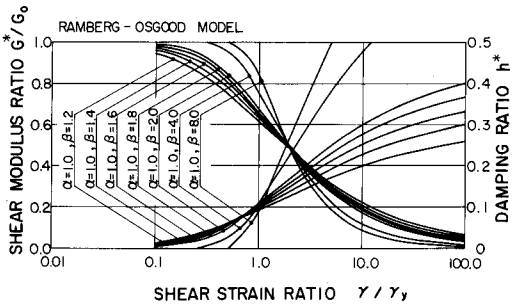


Fig. 7

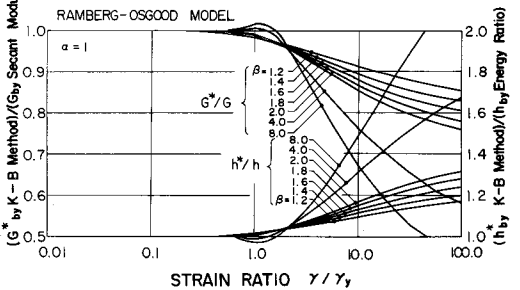
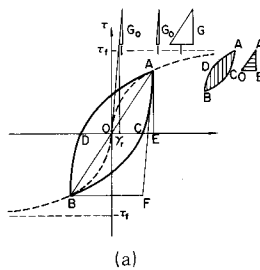
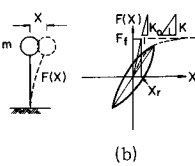


Fig. 8



(a)



(b)

Fig. 9

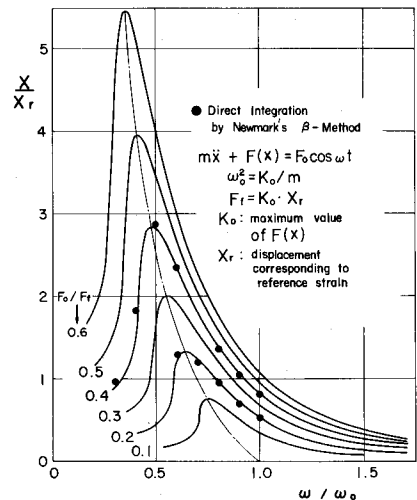


Fig. 10

$$h = \frac{4}{\pi} \left[\frac{G_0}{G} \left\{ \frac{r_r}{r} - \left(\frac{r_r}{r} \right)^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{r}{r_r} \right) \right\} - \frac{1}{2} \right] \quad (10)$$

となる。それに対し、従来のHardin-Drnevichモデルの減衰定数は最大減衰定数 h_{max} を用いて

$$h/h_{max} = (r/r_r) / \{1 + (r/r_r)\} \quad (11)$$

となる。

次に図・9(b)に示すような履歴型Hardin-Drnevichモデルのパネを有する1自由度振動系を考え、それに振巾 F_0 の振動力が加わった場合の定常応答をK-B法により求めると図・10の共振曲線が得られる。この共振時の振動数より精密なセン断剛性が求められ、一方、非粘性系の増巾率 M は、減衰定数を h^* として

$$M = 1 / \sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (2h^*)^2} \quad (12)$$

であり、共振時 $\omega = \omega_0$ では $h^* = 1/(2M)$ により共振点の増巾率より精密な減衰定数が求められる。

図・11では式(9)とK-B法による剛性を比較し、図・12では式(10)、(11)とK-B法による減衰を比較している。従来のHardin-Drnevichモデルにおいて、 $h_{max} = 0.2 \sim 0.3$ をとると実測データとの一致度が良いと言われているが、履歴型モデルでは $r/r_r \geq 2$ でこの値を大巾に上まわることになる。また通常の方法とK-B法による剛性と減衰の比を図・13に示すが、履歴型Hardin-Drnevichモデルでは非線形性がきびしいため、精密解との誤差が非常に大きく、 $r/r_r = 100$ で1/3～3倍のひらきが生じてしまうことが解る。

3. まとめ

3種類の非線形応力ひずみモデルについて等価線形化過程での誤差を検討するため、非線形パネを有する1自由度振動系の応答から導かれる精密解との比較を行なった。その結果、BilinearモデルとRamberg-Osgoodモデルについては通常の地盤材料に対するパラメータの範囲では通常の方法で求められるセン断剛性と減衰定数の誤差は小さいが、履歴型Hardin-Drnevichモデルは非線形性が非常に強いので、ひずみの大きい範囲で、地盤材料の実測減衰定数よりも減衰が大きくなってしまふこと、また精密解との誤差も大きくなることがわかった。

4. 文 献

- [1] Jacobsen, L. S., "Damping in Composite Structures" Proc. 2nd WCEE, 1960, pp.1029~1044
- [2] 渡辺啓行「くり返し載荷時の土の応力へひずみヒステリシスの等価線形化法に関する一考察」電力中央研究所報告 377019, 1978.
- [3] Caughey, T. K., "Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis" Journal of Applied Mech. Dec, 1960, pp. 640~643
- [4] Iwan, W. D., "The Dynamic Response of the One Degree of Freedom Bilinear Hysteretic System" Proc. 3rd WCEE, 1965, pp. II-783~796
- [5] Jennings, P. C., "Periodic Response of a General Yielding Structure" ASCE, Vol. 90, EM2, 1964, pp. 131~163
- [6] 大崎順彦, 原 昭夫, 清田芳治「地盤振動解析のための土の動力学モデルの提案」第13回土質工学研究発表会, 1978, pp. 1057~1060
- [7] 国生剛治, 桜井彰雄「Modified Hardin-Drnevichモデルについて」第33回土木学会年次講演会 Vol. 3, 1978, pp. 116~117
- [8] Finn, W. D. L., Lee, K. W. and Martin, G. R., "An Effective Stress Model for Liquefaction" ASCE, Vol. 103, GT 6, 1977, pp. 517~533

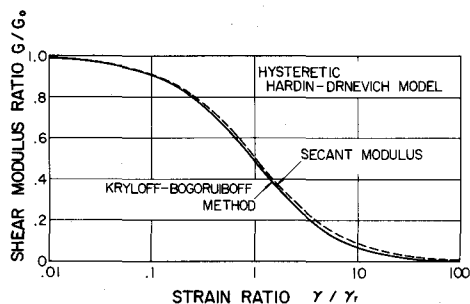


Fig. 11

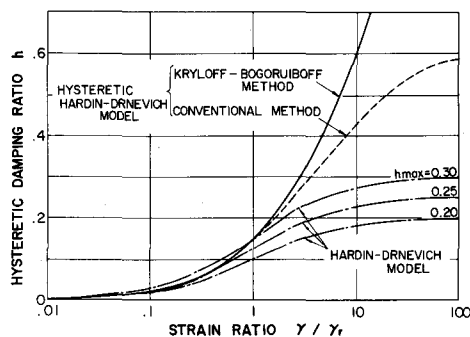


Fig. 12

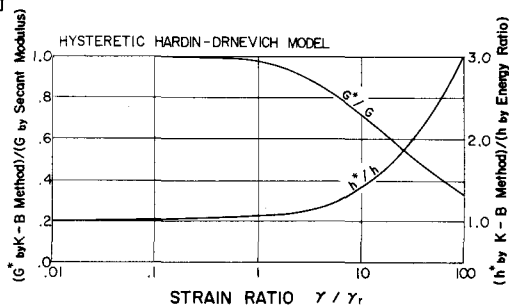


Fig. 13