

半無限弾性体の表面にある低い集中質量によるせん断波の応答について

北海道大学 工学部 正 員 能 町 純 雄
 室蘭工業大学 工学部 正 員 松 岡 健 一
 北海道大学 工学部 学生員 ○三 上 敬 司

1. 諸言

半無限弾性媒体の表面上に円形剛体が，強制定常振動を受ける場合の動的応答をReissner, Sagociが解析した方法に，静的スタンプによる応力分布を仮定する演算によって地盤と構造物系の振動相互作用を検討することが，Bycroft , Ufliand , Collins , Luco等，多くの研究者によって行なわれている。さらに，実際の問題のアプローチとして一層あるいは多層の弾性媒体中に剛体あるいは弾性体インクルージョンが，存在する場合の応答も地震工学の立場から広く検討されている。例えば，有限平板法を用いて，剛地盤上の多層表層に円筒形弾性基礎がある場合の田治見の研究や，有限要素法を用いて半無限弾性媒体の表面に接し，任意剛体が存在する場合の周波数コンプライアンスがFrazerによって検討されている。ことに，表層剛性円形フーチングについては，Lucoがフレッドホルム形積分方程式によって，Bycroft 理論を用い，各強制振動に対するコンプライアンスを求めている。

しかし，剛体の質量を考えたArnold等の場合，水平強制振動に対しては，表面鉛直方向の変位を0 とする仮定を用いているため，レーリーポールの影響が入らず，Lucoの研究では，剛性フーチングの質量は，0 とし，フーチング中心に作用する調和人力振動に関するコンプライアンスを求めている。

本論文では，半無限弾性媒体に定常SH波があるとき，表面にある円筒形剛体の変位応答を，媒体と剛体の密度比をパラメーターとするスペクトルで求めることを試みた。

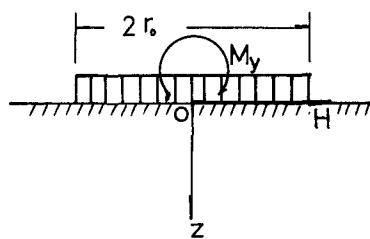
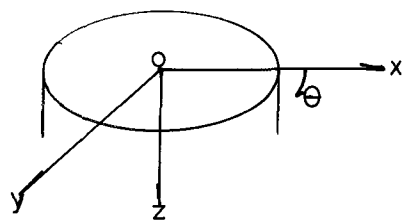


Fig. - 1

2. 解式の概略と変位式

半無限弾性媒体上に半径 r_0 の円筒剛体が密着しているとす。振動方程式は，媒体のラーメ定数を G ， λ とし， ρ を密度とすれば，

$$G \nabla^2 \mathbf{U} + (G + \lambda) \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{U} = \rho \mathbf{U} ,$$

半無限弾性体の表面 $Z=0$ で， $\tau_{yz}=0$ な条件を満足す

る解をフーリエ・ハンケル変換を用いて求めれば，円振動数 p に対する変位式は，次のように書ける。

$$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty e^{ipt} \{ A J_2(\xi r) \pm B J_0(\xi r) \} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \xi d\xi \dots \dots \dots (1)$$

$$W = \int_0^\infty e^{ipt} W J_1(\xi r) \cos \theta \xi d\xi \dots \dots \dots (2)$$

上式中の U , V , W は r , θ , Z 方向の分変位，

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{s^2}{2\alpha\beta} \frac{\ddot{T}}{G} (\alpha e^{-\beta\zeta} - \beta e^{-\alpha\zeta} \pm \beta e^{-\alpha\zeta}) \right\} \\ \pm \frac{s}{2\alpha} \frac{\dot{W}}{G} \left\{ e^{-\alpha\zeta} - \frac{k}{2\alpha\beta} (s^2 + \alpha^2) (\beta e^{-\beta\zeta} - \alpha e^{-\alpha\zeta}) \dots \dots (3) \right.$$

$$W = \frac{s}{kG} (e^{-\beta\zeta} - e^{-\alpha\zeta}) \ddot{T} + \{ 2s^2 (e^{-\alpha\zeta} - e^{-\beta\zeta}) + e^{-\beta\zeta} \} \dot{W} \dots \dots (4)$$

上式中， $k^2 = \rho p^2 / G$ ， $kr = a$ ， $\alpha^2 = s^2 - 1$ ， $\beta^2 = s^2 - \eta^2$ ， $\eta^2 = G / 2G + \lambda$ ， $\zeta = kZ$

$\check{T}$, $\check{W}$ は, $z = 0$ における T_{xz} と W の分布に関するハンケル変換である。

3. 境界条件

円筒剛体(半径 r_0)が媒体に密着し, その底面を通して媒体に及ぼす τ_{xz} , σ_z の分布を Bycroft に従って剛体スタンプの応力分布を仮定すれば,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}|_{z=0} &= \frac{H e^{1pt}}{2\pi r_0} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \\ \sigma_z|_{z=0} &= \frac{3M e^{1pt}}{2\pi r_0^3} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

また, 一般化されたウエイトを用いて剛体底面における平均水平変位 U_a と Y 軸回りの平均回転 ϕ_a を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U_a e^{1pt} &= \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{U \cos \theta - V \sin \theta}{(r_0^2 - r^2)^{3/2}} r dr d\theta \\ \phi_a e^{1pt} &= \frac{3}{2\pi r_0^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r^2 W}{(r_0^2 - r^2)^{3/2}} \cos \theta dr d\theta \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

これらの式から, Luco のコンプライアンス関係式が求まり, Luco と同じ記号を使えば,

$$\begin{Bmatrix} U_a \\ \phi_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{hh} & C_{mh} \\ C_{hm} & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ M_y \end{Bmatrix} \dots (7)$$

また, 調和 SH 波による剛体加速度振幅と底面反力との関係は,

$$H = p^2 m (U_a + U)$$

$$M = p^2 m h^2 \phi_a$$

ただし, m は剛体質量, h は慣性回転半径, U は SH 波の振幅。

従って, 式(7)は

$$\begin{Bmatrix} U_a \\ \phi_a \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{hh} - 1 & \bar{C}_{mh} \\ \bar{C}_{mh} & \bar{C}_{mm} - 1 \end{bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{C}_{hh} \\ \bar{C}_{mh} \end{Bmatrix} \bar{U} \dots (8)$$

上式中,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{hh} &= b \frac{a_0}{4\pi} \text{Re} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{(1 - \eta^2) \alpha (\alpha + \beta)}{F(\alpha\beta)} \right\} \gamma_1^2 s ds \\ \bar{C}_{mh} &= b \frac{3}{4\pi r_0} h \text{Re} \int_0^\infty \left\{ \frac{(1 - 2\eta^2) \alpha - \beta}{F(\alpha\beta)} \right\} \gamma_1 \gamma_2 s ds \end{aligned}$$

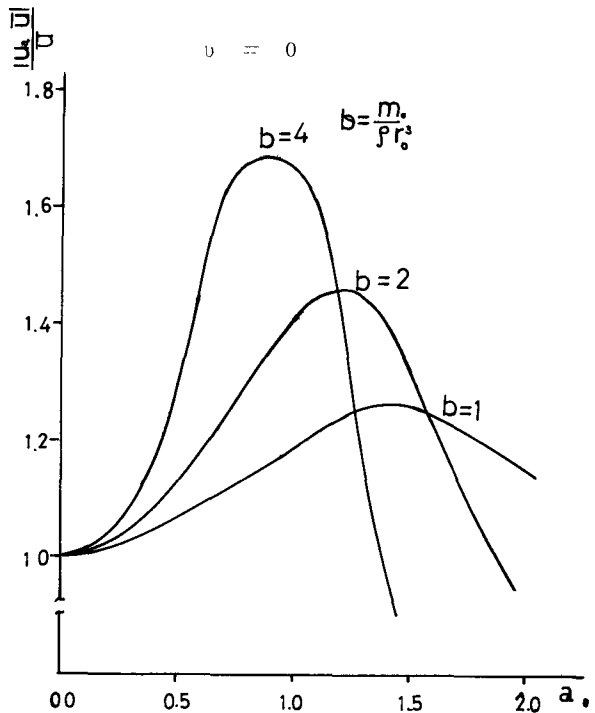


Fig.-2

$$\bar{C}_{mm} = b \frac{9}{4\pi r_0^2 a_0} h^2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \left\{ \frac{\gamma_1^2 \beta}{(\beta - \alpha)} F(\alpha\beta) \right\} s ds$$

また, $b = m / \rho r_0^2$, $\gamma_1 = \sin(a_0 s) / a_0 s$, $\gamma_2 = \{ \sin(a_0 s) / a_0 s - \cos(a_0 s) \} (1 - \eta^2)$

$$F(\alpha\beta) = \beta^3 - (3 - 4\eta^2)\beta^2\alpha - \beta\alpha^2 - (1 - 2\eta^2)^2\alpha^3$$

4. 背の低い場合の応答スペクトル

この場合, $h \rightarrow 0$ とみなせる。剛体の水平変位は, $U_a + U$ で与えられるので (8) 式から

$$\frac{U_a + \bar{U}}{\bar{U}} = \left| \frac{1}{1 - C_{hh}} \right| \dots \dots \dots (9)$$

となり, 上記の値を各質量比 b について無次元円振動数 a_0 に対して計算すれば, Fig.-2, Fig.-3 のように, 入射SH波に対して剛体がどれ程の倍率で振動するかがわかる。質量が大となれば, 倍率は大きくなり, 0 のときは 1 となる。また, $a_0 = 0$ のときも 1 となる。

参考文献

- 1) R. J. Apsel et al: TORSIONAL RESPONSE OF RIGID EMBEDDED FOUNDATION, ASCE, EM.6 1976
 - 2) Veletso, A and Wei, Y: Lateral and Rocking vibration of Footing
 - 3) Day, S and Frazier, G: Seismic Response of Hemispherical Foundation, ASCE, EM.1, 1979
 - 4) Apsel, R and Luco, J: Torsional Response of Rigid Embedded Foundation Proc. ASCE, EM.6, p957, 1976
 - 5) Luco, J and Westmamm, R: Dynamic Response of Circular Footings Proceed. ASCE, EM.5, p1381, 1971
 - 6) Bycroft, G: Soil Structure Interaction at highway Frequency Factors, EARTHQUAKE ENGR. STRUCT. DYNAMICS, Vol.5, No.3, p235, 1977
 - 7) Thomson, T and Kobori, T: Dynamic Compliance of Rectangular foundation on an elastic halfspace. J. Appl. Mech. 30
 - 8) 田治見 広, 下村 幸男: 3次元薄層要素による振動-地震学の動的解析. 建築学会論文集 243. p41
- 昭和51年5月

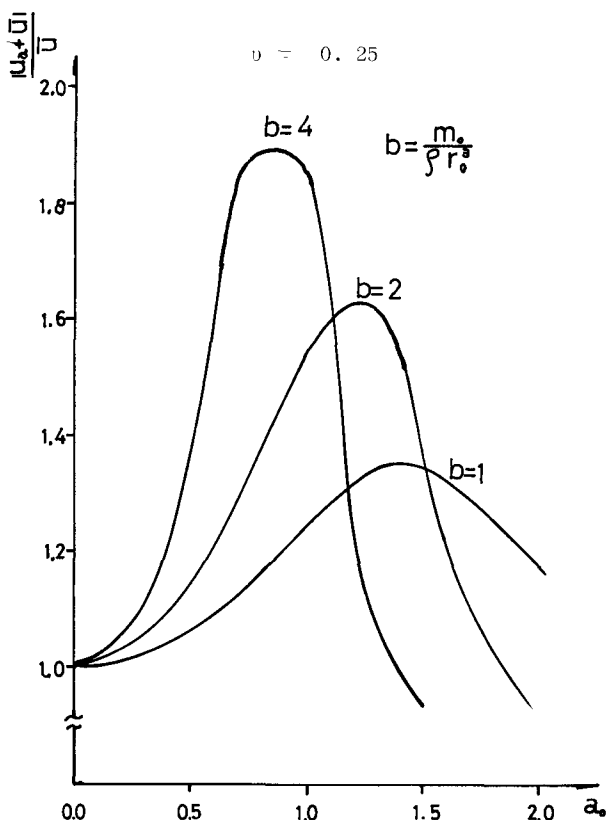


Fig.- 3