有限要素法の波動逸散境界についての一つの試み

清水建設　正員〇赤尾嘉彦・東京大学地震研究所　正員　伯野元彦

1. まえがき　有限要素法（FEM）で振動問題を扱うとき、境界を固定端とするか、自由端とするかの、いずれかの方法しかない。　しかし、境界の一部が、半無限体と接しているときには、どちらでもない。このときは、振動エネルギーが、境界から逸散していくはずだが、両者とも、エネルギーを逃がすことができない。　これを解決するために、様々の試みがなされているが、ここでは入射波（境界を通って有限要素内部に入る波）と、逸散波（境界を通って有限要素内部から出る波）に分離して考えることによって解決した。
以下では、半無限体とは地盤を、波動は地震波（特に今回はSH波のような一方向変位の波）を想定している。
また、この方法はSTEP-BY-STEP法である。

2. 原理　図1のように FEMの境界の内側に第2の境界を設け、入力波変位をF、逸散波変位をG、とすると、全変位uはF+Gとなる。　あるステップまでの全節点の変位と次のステップの境界A上での変位が分かれば、FEM計算により、内部の点の次のステップの変位が分かる。

次の仮定をする。（Aは境界A上の、Bは境界B上の節点）

(i) 入力波について、F_A、F_B、より次のステップのF_Bが予測できる。

(ii) 逸散波について、G_A、G_B、より次のステップのG_Aが予測できる。

式で表わすと、（$\bar{A}$は境界A以外の全節点）

$$u_A = F_A + G_A \quad ①$$

$$u_B = F_B + G_B \quad ②$$

$$u_{\bar{A}} = FEM\,(u_{A,t=T},\ u_{t=T-\Delta T},\ u_{t=T-2\Delta T},\ \cdots) \quad ③$$

$$F_B = forecast\,(F_{A,t=T-\Delta T},\ F_{B,t=T-\Delta T}) \quad ④$$

$$G_A = forecast\,(G_{A,t=T-\Delta T},\ G_{B,t=T-\Delta T}) \quad ⑤$$

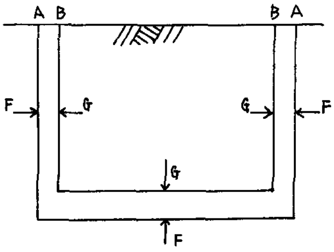


図1

上記の6変数の内、F_Aは入力で既知であるから、未知数はF_B、G_A、G_B、u_A、$u_{\bar{A}}$（u_Bを含む）である。
1ステップ進める手順は、（時刻の記されてないときは、$t=T$。）

(a) 入力F_Aを各点ごとに、位相遅れなどを考慮に計算する。　側面では重複反射の計算による値を入力。

(b) ④、⑤式より、G_A、F_B、を予測する。

(c) F_A G_A より①式で u_A が求まる。

(d) u_A 及び、$u_{t=T-\Delta T}$、$u_{t=T-2\Delta T}$、…… よりFEM計算（③式）で、$u_{\bar{A}}$ が求まる。

(e) u_B 及び F_B より G_B が求まる。（②式）

以上の方法で、キー・ポイントは、(b)の境界変位予測法である。

3. 境界変位予測手法

波動方程式　$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ⑥$$

これを差分に直すと

$$\partial^2 u/\partial t^2 = [u(T+\Delta T) - 2u(T) + u(T-\Delta T)]/\Delta T^2 \quad ⑦$$

$$\nabla^2 u = [u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)]/h^2 + O(h^2) \quad ⑧$$

（但し、$h = \Delta x = \Delta y$ とする。）

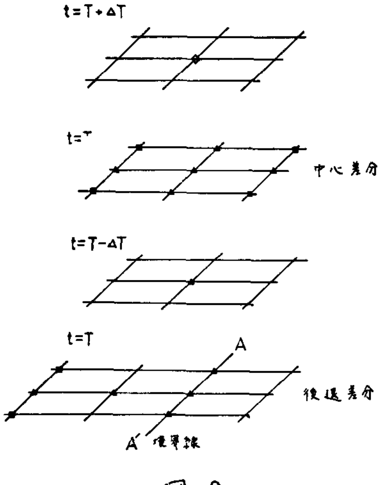


図2

もし　限られた領域内で、この式を適用しようとすると、境界上の点は、⑧式の替りに、次の後退差分を用いなければならない。

$$\nabla^2 u = [u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y-2h) - u(x,y) - 2u(x,y-h)] / h^2 + O\cdot(h) \qquad ⑨$$

図2に$u(x, y, T+\Delta T)$を予測するのに必要な点を示した。
これらの式を用いて、無限体中にある、正方形の領域の中心部を加振したときの応答を、境界上の点と、内部の点について示した。（図3）
⑨式は、後退差分の中でも、最も簡単なものであるが、この式では振動エネルギーを吸収しないことが、伺がわれる。　また、この方法は、境界より2列内側の節点変位を利用しているため、ＦＥＭに適用したときに、境界を3重に設けなければならない。　　これに対して波動による変位を、一つのメッシュ程度の大きさでは、線型変化に近似できる、即ち、図4で変位を波動の進行面と垂直に表わしたものの変位面は、平面で近似でき、波動の進行方向は　変位の変化量の最大の方向と一致

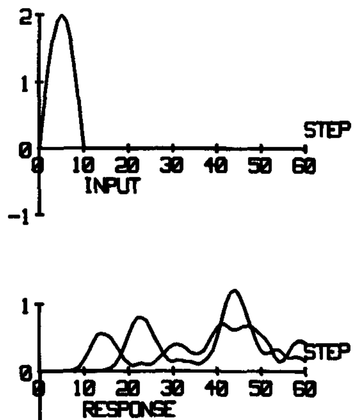
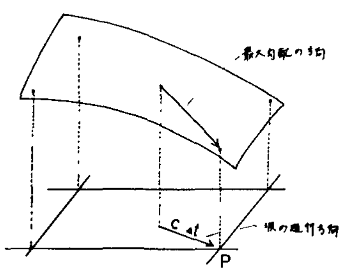


図3



変位曲面の微小部分を平面で近似する
最大勾配の方向＝波の進行方向
図 4

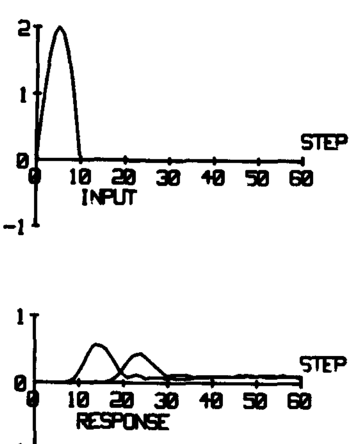


図 5

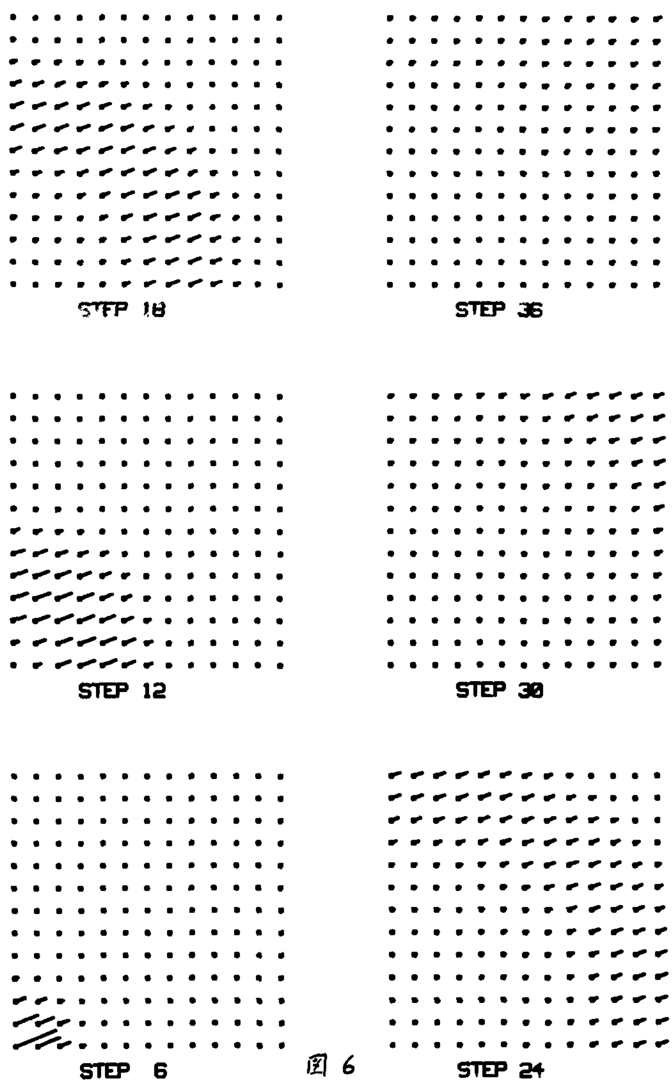


図 6

し、ある点の次のステップの変位は、波動の進行方向と逆方向の（波速）×（1ステップ時間）の距離にある点の変位だとして、計算した。　この方法を平面近似法と呼ぶことにし、後退差分の場合と同じ点での応答結果を図5に、いくつかのステップでの全体の変位を図6に示した。　明らかに、後退差分法よりよい結果が得られた。　ただし、厳密には、二方向から進行して来る波に対しては正しくなく、これは一種の境界処理法であって、現実には、地震波は、一方向からの成分が卓越していることが多いからあまり問題ではない。

ここで両者の比較をすると、

後退差分法

1. より精度の高い差分を用いなければならない。
2. 最も単純な差分ですら境界を3重にしなければならず、手間がかかる。
3. 境界部のメッシュの形状が、長方形かできれば正方形でなければならない。

平面近似法

1. メッシュの大きさに比較して、波長が短いと乱れが生じ、長いと残留変位がある。
2. 境界は2重でよい。
3. 境界でのメッシュの形状は問わず、平面ができる条件ならばよい。

以上により、平面近似法でFEMのシミュレーションを行なった。

<u>4. シミュレーション結果</u>　図1のように、地表面が平で、地表及び地中に構造物がなく、単一の地層の場合、入力と地表面での応答値と理論応答値を図7に、ステップ毎の全体の変位図をいくつか、図8に書かせた。　僅かに、残留変位があるだけで、全体として、理想に近い結果である。　なお、境界での入力は、底部はそのままの値を、側面部では重複反射理論によって求めた値を、両者の境（下部の隅）では両者の中間値を入力した。　次に、地表に壁のような連続した構造物があるときの入力と、壁の先端での応答を図9に、全体の変位図を図10に表わした。
少々、乱れはあるが、壁が減衰振動をしていることが伺われる。　以上のFEMには、粘性減衰などの、振動を減らす手段をまったく採ってなく、乱れを消したり、残留変位を取り除くなどの

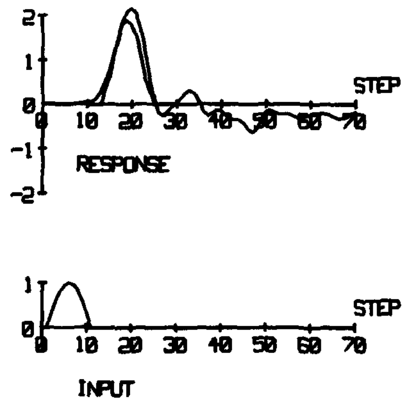


図 7

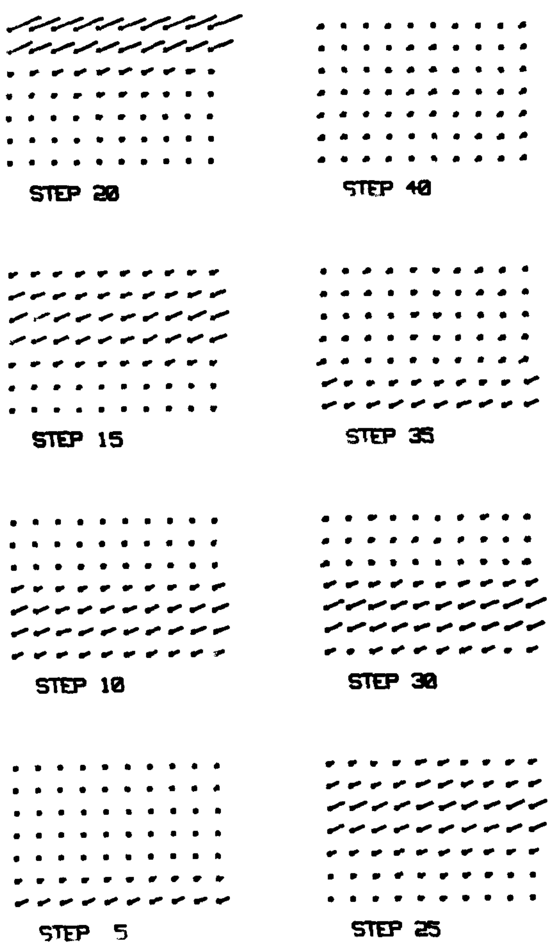


図 8

細いところを通せば、さらによい結果が得られるであろう。

5. まとめ　地球上に固定されているものの振動に、固定端という境界はありえず、ただ、程度の違いであり、その影響が大きい地表及び地中の構造物には、ここで用いた手法は、非常に有望である。　SV波とP波にも適用は可能で、これができれば、さらに利用価値は高まるはずである。

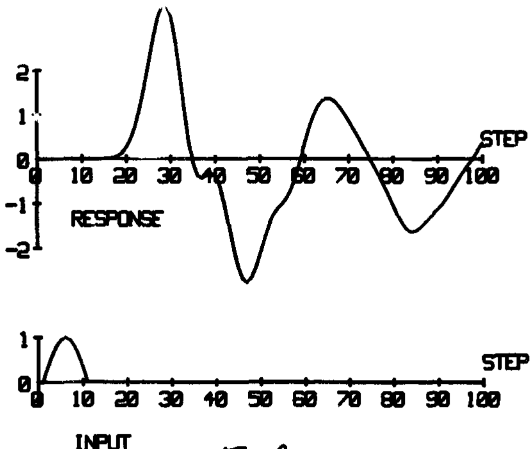


図 9

参考文献

1. 「弾性波動論」　佐藤泰夫
2. 「マトリックス有限要素法」 C.F. デサイ、J.F. アベル
3. 「地中坑道に発振源がある場合の周辺地盤の震動の解析方法」 土木学会論文報告集 1979-1 田村重四郎 中村豊 加藤勝行

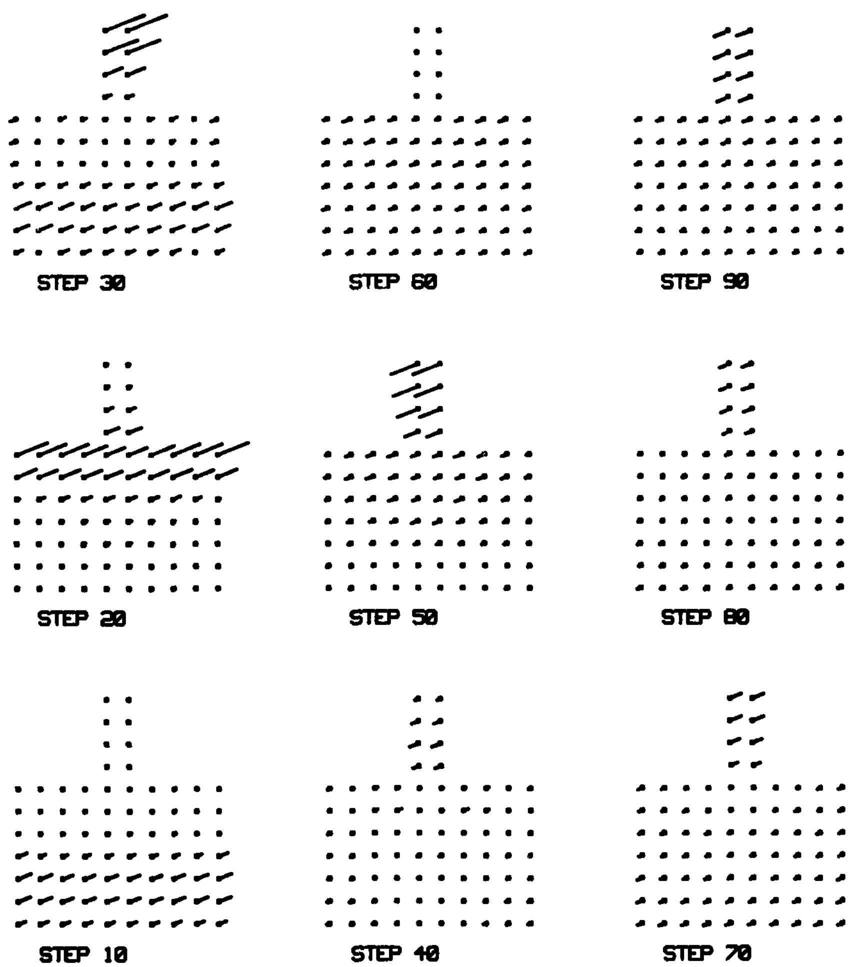


図 10