

1. 緒言

地震動波形の振幅成分および周波数成分は、時間的に不規則に変動する。この不規則性に着目し、地震動を確率過程でモデル化し、構造物の応答解析や安全性の定量的評価を行う耐震設計が近年盛んに行われている。地震加速度波形の非定常性を物理的に解釈することに可能な表示法としてMarkのPhysical Spectrumを導入し、それにより非定常人工地震波の作成を行った。相関関数型の確率過程を用いた場合、かなりの精度で波形作成が可能であることも判明した⁽¹⁾。かくして、人工地震波の作成は最初非定常確率過程から出発したのであるが、今や地震動特性の全てを考慮したモデル化が完成されたともいえる。勿論、記録された波形特性に着目した場合であり、その波形特性の要因である地盤性状や地震源メカニズム等と結びつけた波形特性の解明は今後の問題として残されている。

以上は、全て1次元に着目した1次元波形の解析である。近年、かつて大地震の洗礼を受けたことのない新しい橋造物、たとえば原子炉施設、パイプライン、水平方向に長大な吊橋等の建設が見られる。これらは規模が大きという意味だけでなく、その社会的重要性から高度の安全性を有するものでなければならぬ。したがって、その耐震性検証のために動的解析を行う場合にも、一般に採用される1次元または2次元解析では不十分であり、より正確と期待するために3次元解析が必要となる。1次元に着目しても水平成分および垂直成分の計3成分の地震動モデルが必要となる。吊橋等の場合には異なる複数地盤に於ける入力波形が必要である。これらの複数波形は勿論1つの地震から生ずるわけであるから互にならうかの関連性を持つと考えるのが当然であり、ここに多次元非定常確率過程によるモデル化が必要となる。

本論は3次元地震動あるいは複数入力波形を必要とする動的解析を要する場合、これらの波形の相関性をどのようにとらえらるべきかを理論的に整理することが必要と考え、一般化した多次元非定常確率過程の理論を展開する。そして波形間の相関性を表わす量として相互スペクトル(cross spectrum)を提案し、さらにそのシミュレーション法を示す。最後に、本論で扱う理論の地震工学への応用について言及する。

2. 多次元非定常確率過程の相互スペクトル

時間領域の n 個の利用波数領域においても非定常となる平均値0の多次元確率(ガウス)過程 $x_i(t)$; $i=1, 2, \dots, m$ に対して相互スペクトルを次式で提案する。

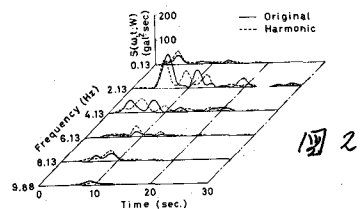
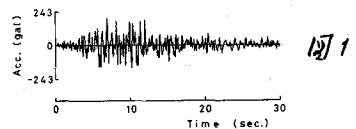
$$A_{ij}(\omega, t; W) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) x_i(u) e^{-i\omega u} du \quad (1)$$

として、相互スペクトルは

$$S_{ij}(\omega, t; W) = E \left[\frac{1}{2\pi} A_{ij}(\omega, t; W) A_{ij}^*(\omega, t; W) \right] \quad (2)$$

但し、 $-\infty < \omega < \infty$, $-\infty < t < \infty$, $i, j = 1, 2, \dots, m$

ここで扱う多次元確率過程とは、その1つのサンプル波形が図1に示すように振幅が時間的に変動すると同時に、その周波数特性も図2のように時間的に変動する⁽²⁾という2元的非定常性を有する複数の



確率過程であり、一般の非定常過程は厳密にはこの確率過程の範疇にはいる。

さて、(1)式に於いて $W(t)$ は time window function で、 $t=0$ の近傍で正値をとり、この近傍の外では $|W(t)|$ は非常に小さいものとする。さらに、 $W(t)$ は次式を満足するものとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t) dt = 1 \quad (3)$$

このような関数はいくつか考えられるが文献(4)を参照して、ガウス型 window function として

$$W(t) = (\sqrt{2}/T)^{1/2} \exp\{-\pi t^2/T^2\} \quad (4)$$

を採用する。なお(2)式に於ける *印は共変関数と解釈する。

3. 相互スペクトルの意味

(1)および(2)式で提案した $x_i(t)$ 及び $x_j(t)$ の相互スペクトルは次のように変形することにより物理的意味が明確となる。すなわち、(1)式と(2)式に代入し、整理してみると

$$S_{ij}(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) E[x_i(u_1) x_j(u_2)] e^{-i\omega(u_1-u_2)} du_1 du_2 \quad (5)$$

ここで、 $u_1 - u_2 = \tau$, $(u_1 + u_2)/2 = u$ と変数変換を行えば(5)式は次のようになる。

$$f_i(t, u) = W(t-u) x_i(u) \quad , \quad f_j(t, u) = W(t-u) x_j(u) \quad (6)$$

として

$$S_{ij}(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E[f_i(t, u+\tau/2) f_j(t, u-\tau/2)] du \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7)$$

(6)式は $x_i(u)$ 及び $x_j(u)$ を重み修正 $W(t-u)$ をほどこして、時間 t の近傍でとりだすことを意味する。このようにしてとりだした $f_i(t, u)$, $f_j(t, u)$ の相互相関関数 $E[f_i(t, u+\tau/2) f_j(t, u-\tau/2)]$ を算出する。これは時間 t の近傍の τ だけ異なる時間差 $(u+\tau/2) - (u-\tau/2) = \tau$ の関数であり、 u が変数となっている。これを u に関して全積分するものが(7)式に於ける $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots du \right\}$ 内の操作である。したがって、換言すれば一般化した相互相関関数 $E[x_i(u+\tau/2) x_j(u-\tau/2)]$ を時間 t の近傍で求め、時間方向 u で平均化したものといえる。このようにして求めた相互相関関数をフーリエ変換したものが(7)式である。したがって定常確率過程に於ける相互スペクトルを非定常確率過程の場合に拡張して定義したと考えればよい。

(7)式で時間 t を順次移動させることにより、 $x_i(u)$ と $x_j(u)$ の相関性がどのように変化するかを調べることができよう。この意味からも十分に妥当性のある相互スペクトルの概念といえよう。当然のことであるが、 $i=j$ の場合には(2)式は Physical Spectrum となる。図3は(6)及び(7)式の内容を示す。

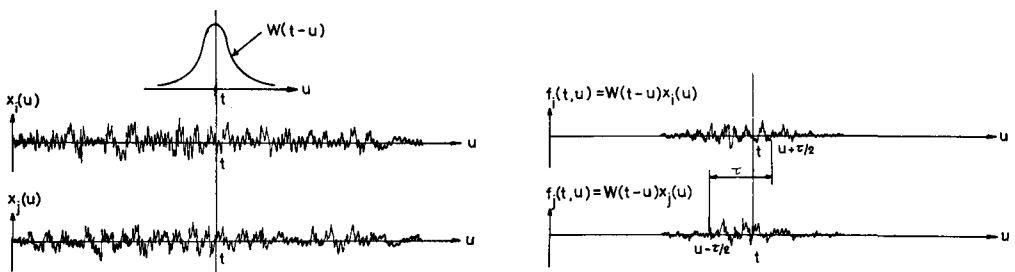


図3

さて、(9)式の $\{ \}$ 内は t に関して偶函数とはならないので (7) 式の相互スペクトルは一般に複素関数となる。
 ここで、実数部および虚数部をそれぞれ $C_{ij}(\omega, t; W)$, $Q_{ij}(\omega, t; W)$ とすれば

$$S_{ij}(\omega, t; W) = C_{ij}(\omega, t; W) + i Q_{ij}(\omega, t; W) \quad (8)$$

あるいは

$$S_{ij}(\omega, t; W) = |S_{ij}(\omega, t; W)| \exp\{i \theta_{ij}(\omega, t; W)\} \quad (9)$$

と表わす。ここで、

$$\theta_{ij}(\omega, t; W) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{ij}(\omega, t; W)}{C_{ij}(\omega, t; W)} \right\} \quad (10)$$

(8) 式で、実数部の Co-spectrum および虚数部の quadrature-spectrum に対しては定常確率過程の場合の性質と全く同様のことがいえる。これらの性質から

$$S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ji}^*(-\omega, t; W), \quad S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ji}^*(\omega, t; W) \quad (11)$$

の関係が成立する。

さらに、次式の成立することが証明できる。(証明略)

$$\gamma_{ij}^2(\omega, t; W) = \frac{|S_{ij}(\omega, t; W)|^2}{S_{ii}(\omega, t; W) S_{jj}(\omega, t; W)} \leq 1 \quad (12)$$

これは定常確率過程におけるコヒーレンス (coherence function) を非定常確率過程に拡張したものと考へられよう。もし、 $x_i(t)$ と $x_j(t)$ が同一過程 ($i=j$ のとき) ならば当然完全相関となり、このとき (12) 式は 1 となる。一方、 $x_i(t)$ と $x_j(t)$ が無相関ならば、 $E[f_{ij}(t, u+\frac{1}{2}) f_{ij}(t, u-\frac{1}{2})] = W(t-u-\frac{1}{2}) W(t-u+\frac{1}{2}) E[x_i(u+\frac{1}{2})] \cdot E[x_j(u-\frac{1}{2})] = 0$ となるから $\gamma_{ij}^2(\omega, t; W) = 0$ である。一般には $\gamma_{ij}^2(\omega, t; W)$ は 0 と 1 の間の値となり、時間 t を変化させることにより、 $x_i(t)$ と $x_j(t)$ の相関性が成分波 ω に於いてどのように変化するかを知るこゝができる。しかしながら相関性の位相づれを知るためには (8) 式の $Q_{ij}(\omega, t; W)$ あるいは (10) 式の位相角 $\theta_{ij}(\omega, t; W)$ を調べなければならぬ。 $\theta_{ij}(\omega, t; W)$ は成分波 ω がどの程度の位相づれを持って相関しているかを示すものである。

4. 多次元非定常確率過程のシミュレーション

(2) 式を要素として次に示す相互スペクトル行列が構成される。

$$S(\omega, t; W) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, t; W), & S_{12}(\omega, t; W), & \dots, & S_{1m}(\omega, t; W) \\ S_{21}(\omega, t; W), & S_{22}(\omega, t; W), & \dots, & \\ \vdots & & \ddots & \\ S_{m1}(\omega, t; W), & S_{m2}(\omega, t; W), & \dots, & S_{mm}(\omega, t; W) \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、(11) 式より $S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ji}^*(\omega, t; W)$ が成立つから (13) 式はエルミート行列である。

(13) 式の要素で示される全ての相関特性を満足する多次元非定常確率過程 $x_i(t)$: $i=1, 2, \dots, m$ の同時シミュレーションは次式を用いて可能である。

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N b_{ip}(\omega_k, t) \cos\{\omega_k t + \beta_{ip}(\omega_k, t) + \varphi_{pk}\} \quad ; i=1, 2, \dots, m \quad (14)$$

但し、(14) 式の右辺は次の条件を満足するように与えること。

(1) φ_{pk} は ω と t の両方に対して一様乱数である。 $p=q$ 且つ $k=l$ 以外のときは φ_{pk} と φ_{ql} は互に独立である。

(2) $\alpha_{ij}(\omega, t)$ および $\beta_{ij}(\omega, t)$ は次式で与える。

$$4 S_{ij}(\omega, t; W) \Delta\omega = \sum_{p=1}^3 B_{ij}(\omega, t) B_{ij}^*(\omega, t) \quad ; \quad i \neq j \quad (15)$$

すなわち、行列 $S(\omega, t; W)$ を $4\Delta\omega$ 倍したものを 2つの三角行列 $B(\omega, t; W)$ と $B^T(\omega, t; W)$ に分解してできる要素 $B_{ij}(\omega, t)$ の絶対値および位相角をそれぞれ $\alpha_{ij}(\omega, t)$, $\beta_{ij}(\omega, t)$ とする。

(3) ω_k は $S(\omega, t; W)$ の固有振動数 ω の上限値および下限値をそれぞれ ω_U , ω_L とし、 $\Delta\omega = (\omega_U - \omega_L) / N$ と分解したとき、 $\omega_k = \omega_L + (k - \frac{1}{2}) \Delta\omega$ で与えられる。N は十分に大きな正整数。

本シミュレーションは相互スペクトル行列の各要素が時間 t であるたうに変化する場合に、より精度の高いシミュレーションが可能となる。(14)式によるシミュレーション法の証明は紙面の都合上省略するが、地震動に適用する場合には過去の研究から推察してよい精度が期待できる。

5. 3次元地震動の相互スペクトルと主軸

地震動を水平 2 成分および垂直成分の 3 成分からなるベクトルと考えるとき、これらの 3 成分間の相関性は相互スペクトルを求めることによって検討できる。一般に、地震動の記録は地震計の設置方向にそって測定されるから、必ずしも 3 方向成分は最適な方向をむいていないと限らない。そこで、この直交する成分を物理的解釈の可能な、意味のある 3 方向に座標変換してから、その相互スペクトル特性を検討すれば地震動の本質的な問題に対して新たな知見が得られるかもしれない。たとえば一成分を震源方向になるように変換することも一つの方法であろう。本論はこのような変換で得られる新しい主軸、すなわち主軸の概念を相互スペクトルと結びつけて提案してみる。ここではその理論を示すにとどまるので、実際にデータ解析をすることにより初めて内容のある主軸が決定されよう。

(1) 主軸の概念 (その 1) ⁽³⁾

(5) 式を ω 領域で全積分すれば

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\omega, t; W) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-u) E[x_i(u)x_j(u)] du \quad (16)$$

したがって、 $S_{ij}(t)$ を要素とする 3×3 の行列 $S_2(t)$ は時間 t の近傍における平均共分散、すなわち単位時間当りの平均エネルギーを要素とする実数対称行列となる。いま、3 成分の瞬間的な平均エネルギーがそれぞれ最大値、中間値、最小値となるような主軸を定義してみる。これは (16) 式を要素とする行列 $S_2(t)$ の固有値問題として主軸を定めることであり、時間 t とともに方向が変動する主軸がある。

(2) 主軸の概念 (その 2)

(6) 式を時間領域で全積分すれば

$$S_{ij} = \iint_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\omega, t; W) d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} E[x_i(u)x_j(u)] du \quad (17)$$

したがって、(17) 式を要素とする行列の固有値問題として主軸方向を定めれば、全エネルギーが最大値、中間値および最小値となる。主軸は時間 t に独立な固定軸となり、この方向での相互スペクトルの根拠から、新しい知見が得られるかもしれない。

(3) 主軸の概念 (その 3)

(13) 式の相互スペクトル行列の複素固有値は題として主軸が定義できるよう。(13) 式がエルミート行列にあり、一般に、実数固有値とそれに対応する複素固有ベクトルが求まる。したがって、複素主軸を定義するところになる。

* 詳細は土木論文報告集に投稿中である。文献(1)星谷他; 土木論文 No. 245, 1970年11月 (2)星谷; 土木誌 1975年3月 (3)柴田他; 日本機械学会講演集 No. 760-3, 1976年4月