

離散化された系の波動論的考察

熊本大学工学部 正員 秋吉 卓

1 まえがき 対象とする系が有限な広がりを持つ場合には、連続体を離散系に置換することによる解析結果の相異を格子間隔の細分化により縮めることが可能であるが、一方地盤のように無限の広がりを持つ場合にはこれが容易ではない。動的な問題においては、計算上適当な広がりを持つように外側の境界を設けねばならないが、そのため波動が逸散せず系内に蓄積して複雑な結果をもたらすこともあった。これを解決するために、減衰器を各質点間に配置したり、設けた境界に適当な修正を加えたりする手法がとられてきた。^{1), 2), 3)}

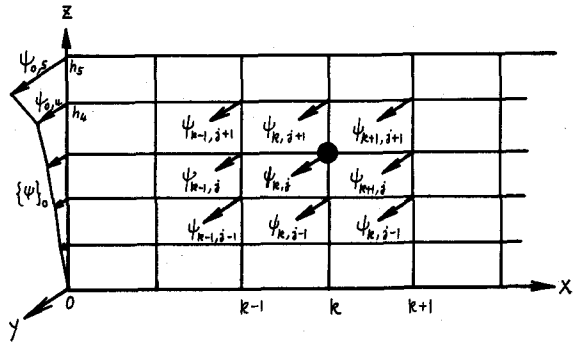


図-1 離散化された系

定常正弦振動においては、Lysmer らの方法は有効であり、モデルの如何によつて離散化された系の広がりをほとんど考慮しなくても、その解析結果は無限に広がりを持つ解析結果と一致させることも分った。⁴⁾ 非定常な振動にあつては、厳密解との比較はかなり困難になるが、著者らはここで簡単なモデルの解析的な解を導き、若干の数値計算結果を發表したが、⁵⁾ ここではその後の結果を加えて報告する。

2 解析手法と数値計算 ここに対象とする離散系は図-1 のような水平方向に半無限の地盤が硬い基礎に載っているような場合で、左方境界 ($x=0$) において加振されるときの各質点を通して右方無限遠へ逸散する波動について考える。各質点は減衰のないばねで支持されていて、水平せん断振動のみ (SH 波) が右方無限遠へ伝播するものとする。格子点 (k, j) の質点に関する運動方程式は図-2 より次式で表わされる。

$$\begin{aligned} m \ddot{\psi}_{k,j} + k_1 (2\psi_{k,j} - \psi_{k-1,j} - \psi_{k+1,j}) \\ + k_2 (2\psi_{k,j} - \psi_{k,j-1} - \psi_{k,j+1}) \\ + k_3 (4\psi_{k,j} - \psi_{k-1,j-1} - \psi_{k-1,j+1} \\ - \psi_{k+1,j-1} - \psi_{k+1,j+1}) = 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

ただし、各 ψ は格子点の水平変位、 m は格子点の集中質量、および k_1, k_2, k_3 はばね定数であり、有限要素法によるとき対角ばね剛性 k_3 が存在する。

いま定常状態における波動伝播を考えるため、水平・鉛直方向の波数をそれぞれ k_x, k_z とすると、変位は

$$\psi_{k,j} = \psi_0 e^{i(\omega t - k_x \cdot ka - k_z \cdot jb)} \quad \dots (2)$$

と書けるので、これを式 (1) に代入すると、次の分散関係に関する方程式が得られる。

$$\omega^2 = 4\omega_1^2 (1 - \cos \theta) + 4\omega_2^2 (1 - \cos \chi) + 4\omega_3^2 (1 - \cos \theta \cos \chi) \quad \dots (3)$$

ここに、 $\omega_1^2 = k_1/m$, $\omega_2^2 = k_2/m$, $\omega_3^2 = k_3/m$, $\theta = k_x a$, $\chi = k_z b$ 。

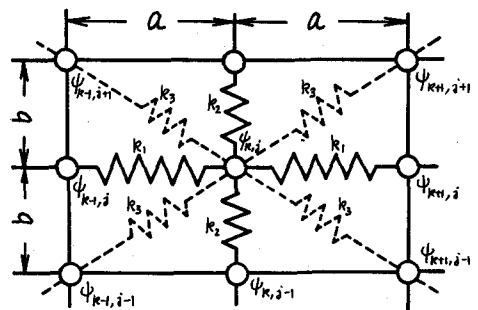


図-2 質点-ばね配置図

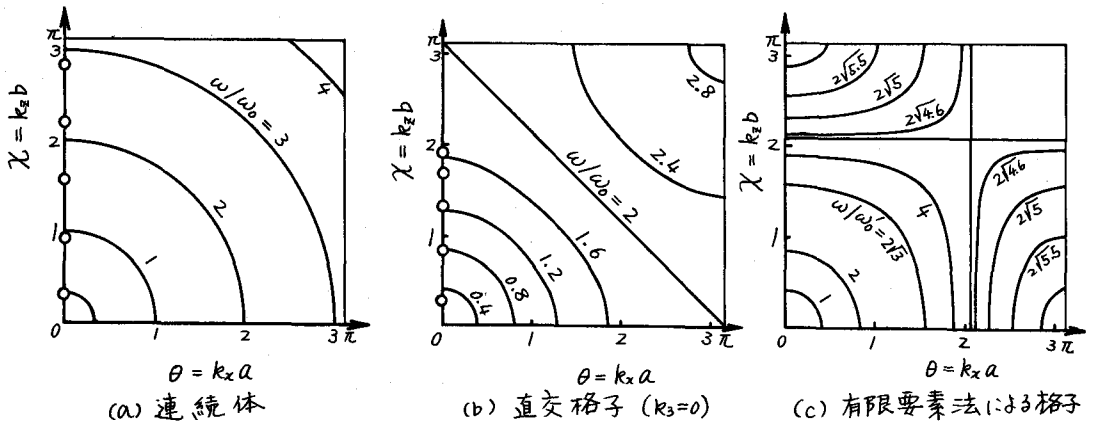


図-3 分散曲線

図-3の(b), (c)には式(3)の分散曲線($a=b$)を示したが、比較のため連続体によるものを同図(a)に示した。ここで対象としている系は地表と基盤面に境界を持つので、 $\chi = k_z b$ に関して独立に固有値が存在し、その例を図中○印で示してある。したがってある振動数 ω に対して、波数 $\chi = k_z b$ の固有値に対応する波数 $\theta = k_x a$ の実数値が図より得られないときは虚数値となり、減衰振動を表わすことになる。同図(b)の基準円振動数 ω_0 は $\omega_0 = c/a$ (c : 横振速度)であり、同(c)の ω'_0 は $\omega'_0 = c/\sqrt{6}a = \omega_0/\sqrt{6}$ となっている。したがって $\chi = k_z b$ の固有値が小さい場合すなわち現実系への分割が粗である場合は、外側の振動数 ω の比較的小さい値に対して $\theta = k_x a$ の実数値は得られない場合があり、振動が起りにくい状態が現われる。例えば図中(b)の○印は鉛直方向に5変位したときの固有値であるが、 $\omega > 2\omega_0$ では全ての伝播モードが減衰モードになることを示している。現実分割を増やすことにより連続体の性質に接近するが、実際上は伝播するモードをどの次数まで要求するかによって分割が決定される。

次に過渡的な現象について考えてみよう。解析の対象とする系は図-3の(b)のような直交格子を考えると(対角剛性 $k_3=0$)、式(1)のLaplace変換により次式をうる。

$$m s^2 \bar{\psi}_{k,j} + k_1 (2\bar{\psi}_{k,j} - \bar{\psi}_{k+1,j} - \bar{\psi}_{k-1,j}) + k_2 (2\bar{\psi}_{k,j} - \bar{\psi}_{k,j+1} - \bar{\psi}_{k,j-1}) = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $\bar{\psi}_{k,j} = \bar{\psi}_{k,j}(s) = \mathcal{L}[\psi_{k,j}(t)]$ であって、初期条件 $\dot{\psi}_{k,j}(0) = \psi_{k,j}(0) = 0$, ($k=0, 1, 2, \dots$; $j=1, 2, \dots, n$)が用いられる。そこで $\bar{\psi}_{k,j}(s)$ が変数分離されるとして

$$\bar{\psi}_{k,j}(s) = \psi_k(s) \cdot \phi_j, \quad (k=0, 1, 2, \dots; j=1, 2, \dots, n) \quad \text{----- (5)}$$

とおいて、式(4)に適用すると次の式に分離される。

$$(s^2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 - \lambda^2) \bar{\psi}_k - \omega_1^2 (\bar{\psi}_{k-1} + \bar{\psi}_{k+1}) = 0 \quad \text{----- (6)}$$

$$(2\omega_2^2 - \lambda^2) \phi_j - \omega_2^2 (\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) = 0 \quad \text{----- (7)}$$

式(7)をマトリックス形式に書き直すと

$$([A] - \lambda^2 [I]) \{\phi\} = 0 \quad \text{あるいは} \quad [Q]^T [A] [Q] = [\lambda^2] [Q]^T [Q] \quad \text{----- (7)'}$$

ここに、 $[Q]$ はモードマトリックス、 $[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\omega_2^2 = k_2/m$
 $[\lambda^2]$ は対角固有値行列

しかしに $[Q]^T [Q] = [I]$ と正規化すれば $[Q]^T [A] [Q] = [\lambda^2]$ となっている。

一方、式(6)については l 次モード $\{\phi\}_k$ の振幅 $\bar{\psi}_k^{(l)}(s)$ はその伝達関数を $G_k^{(l)}(s)$ とすると

$$\bar{\psi}_k^{(l)}(s) = \{G_k^{(l)}(s)\}^k \bar{\psi}_0(s) = G_k^{(l)}(s) \bar{\psi}_0(s) \quad \text{-----}(8)$$

と書き表わせるので、結局 k 列目の変位ベクトル $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ は次式のようになる。

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = \sum_{l=1}^n A_l \bar{\psi}_m^{(l)}(s) \{\phi\}_l = [Q] \begin{bmatrix} \{G^{(1)}(s)\}^k \\ \vdots \\ \{G^{(n)}(s)\}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \bar{\psi}_0(s) \\ \vdots \\ A_n \bar{\psi}_0(s) \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(9)$$

いま左方境界 ($k=0$) において、外力(変位)振幅分布が $\{f(s)\}$ と与えられているときは、式(9)は

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = [Q] [G(s)]_k [Q]^T \{f(s)\} \quad \text{-----}(10)$$

となるので、これを逆変換して第 k 列目の変位ベクトルの解析表示をうる。

$$\{\psi(t)\}_k = [Q] [G(t)]_k [Q]^T \{F(t)\} = [Q] \int_0^t [G_k(\tau)] [Q]^T \{F(t-\tau)\} d\tau \quad \text{-----}(11)$$

さて、式(8)は式(6)を満足せねばならないので、 l 次モードの伝達関数は次式のようになる。

$$G_k^{(l)}(s) = \left[\sqrt{\frac{s^2}{4\omega_l^2} + \frac{\lambda_l^2}{4\omega_l^2} + 1} - \sqrt{\frac{s^2}{4\omega_l^2} + \frac{\lambda_l^2}{4\omega_l^2}} \right]^2 \quad \text{-----}(12)$$

したがって、 k 列目の左端境界変位に対する伝達関数 $G_k^{(l)}(s) = \{G^{(l)}(s)\}^k$ の逆変換により次式をうる。

$$G_k^{(l)}(t) = \frac{2k}{t} J_{2k}(2\omega_l t) - \lambda_l \int_0^t 2k J_{2k}(2\omega_l \tau) \frac{J_1(\lambda_l \sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \quad \text{-----}(13)$$

もし有限要素法によるときは、図-2 より見るに k は剛性 k_3 を考慮しなければならないが、この変数分離法によることはできず、わずかに $a \ll b$ あるいは $a \gg b$ の特殊な場合についてのみ近似的に解析解が得られることは文献5でも指摘した通りである。一方、連続体における厳密解 $\psi(x, z; t)$ は次式で与えられる。

$$\psi(x, z; t) = \sum_{l=1}^{\infty} X_l(x; t) \sin k_l z \quad \text{-----}(14)$$

$$\text{ここに、} X_l(x; t) = G_l(t - x/c) - k_l x \int_{x/c}^t G_l(t - \tau) \frac{J_1(k_l c \sqrt{t^2 - x^2/c^2})}{\sqrt{t^2 - x^2/c^2}} d\tau \quad \text{-----}(15)$$

$$G_l(t) = \frac{2}{H} \int_0^H g(z; t) \sin k_l z dz, \quad k_l H = \frac{\pi}{2} (2l-1), \quad g(z; t): \text{外力変位分布} \quad \text{-----}(16)$$

数値計算例として、左方境界が角変位 ψ_0 なる正弦回転振動(鉛面垂直方向)を考えると、 $\{F(t)\}$ は次式となる。

$$\{\psi(t)\}_k / \psi_0 H e^{i\omega t} = [Q] \begin{bmatrix} H_k^{(1)}(\omega; t) \\ \vdots \\ H_k^{(n)}(\omega; t) \end{bmatrix} [Q]^T \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{k,1}(\omega; t) \\ \vdots \\ W_{k,n}(\omega; t) \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(17)$$

$$\text{ここに、} H_k^{(l)}(\omega; t) = \int_0^t G_k^{(l)}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \quad \text{-----}(18)$$

図-4 は加振変より水平距離 $x=10a$ ($k=10$, a : 格子間隔) の点における地表面の水平変位の過渡周波数応答関数 $|W_{10,5}(\omega; t)|$ であるが、離散系の応答は早い時刻から現われてきて、定常になるまでにかなりの時間を要する。また数値計算の対象としている系の縦質変位は $n=5$ であるため $\omega/\omega_0=3$ 程度の振動数でも振幅が激減しまたは波動がここまですばってこないことを示している。これは図-3の(b)において $\omega/\omega_0 > 2$ では水平に播波数 $k_2 a$ が整数としては得られないこととよく対応している。図-5 は観測地点の相違による過渡周波数応答関数 $|W_{k,5}(\omega; t)|$ について示しているが、加振変に近いほど離散系の応答は素早く一定値に達し、離れ

るほど過渡状態は長引くとともに、複雑な固有振動を伴い、厳密解との対応もあまり良くない。この応答関数の周波数について整理したのが図-6であるが($k=10, j=5$; 図-4に相当)、厳密解よりも早い時刻に現われる振動の振幅はそれほど大きくなないので問題はないが、時間の経過に対して低振動数の場合のみ厳密解に近接することを示している。したがって、質点への分割を増して離散系の固有振動数を高めて有効振動数領域を広めることが望ましいが、必要最大振動数が与えられるならば図-3のような分散曲線から前以って適当な分割数を推定することも可能であろう。

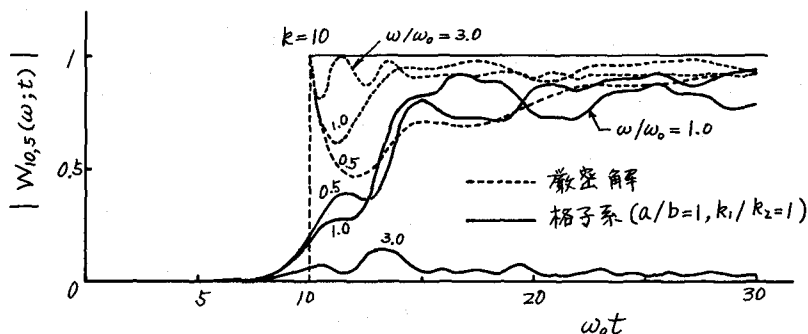


図-4 過渡周波数応答関数

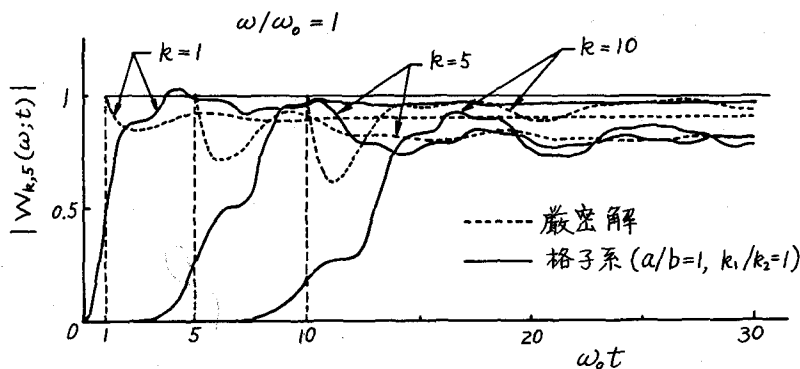


図-5 過渡周波数応答関数

参考文献

- 1) 後藤・土岐・吉原: 数値解析 報第29号A, 昭44.3, pp.273-287.
- 2) J. Lysmer & R. Kuhlemeyer: Journal of EM div, ASCE, Vol.75, No. EM4, Aug., 1969, pp.889-897.
- 3) J. Lysmer & G. Waas: Journal of EM div, ASCE, Vol.98, No. EM1, Feb., 1972, pp.85-105.
- 4) 秋吉・滝川・吉川: 土木学会第28回年次学術講演会講演概要集, I-250, pp.522-523.
- 5) 秋吉・吉川: 土木学会第29回年次学術講演会講演概要集, I-256, pp.540-541.

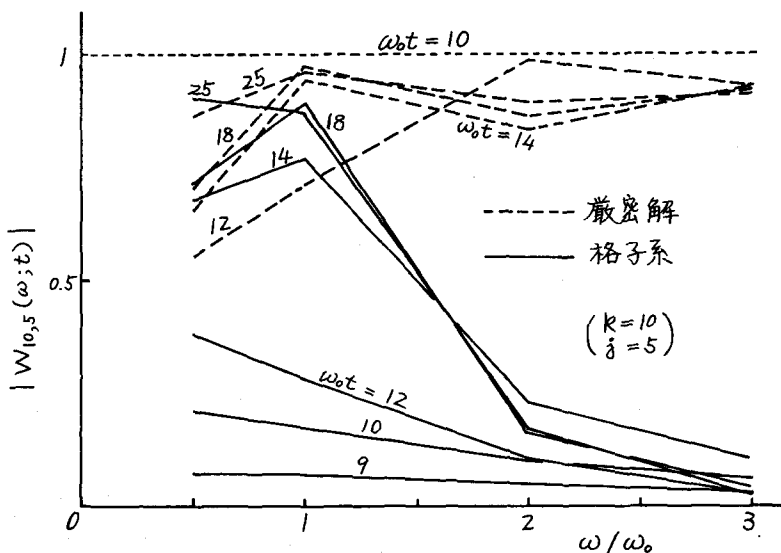


図-6 過渡周波数応答のスペクトル