

2. 地盤内散乱投動および反射投動

$$\nabla^2 \phi_i + k_m^2 \phi_i = 0 \quad , \quad \nabla^2 \psi_i + \rho_m^2 \psi_i = 0 \quad \text{-----} (2)$$

式(2)を用筒座標で表示し、波動ポテンシャルを計算すれば次式が得られる。

$$\phi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m H_m^{(0)}(k_m r) \cdot \sin m\theta \cdot \sin \alpha_m z \cdot e^{i\omega t}, \quad \psi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m H_m^{(0)}(k_m r) \cdot \cos m\theta \cdot \sin \alpha_m z \cdot e^{i\omega t} \quad (3)$$

上式の A_m, B_m は未知定数, $H_m^{(0)}(z)$ は第2種ハンケル関数で, r の正の方向に伝播する波動を表わしている。次に $y = -B$ で相対変位をゼロとするポテンシャル中, ψ_0 を計算するが, その際に式(3)の円筒波ポテンシャルを平面波ポテンシャルに変換する必要がある。U.R. THIRUVENKATACHAR によるハンケル関数の積分表示²⁾を応用すれば次の定軸上での積分形が得られる。

$$H_m^{(0)}(k_m r) \cdot \sin \theta = -\frac{z i}{\pi k_m} \int_0^{\infty} e^{i k_m z} \cos k x \, dk, \quad H_m^{(0)}(k_m r) \cdot \cos \theta = \frac{z i}{\pi k_m} \int_0^{\infty} e^{i k_m z} \frac{k}{k_m} \sin k x \, dk \quad (4)$$

ここに, $\nu_k^2 = k^2 - k_m^2$, $\nu_k^2 = k^2 - k_m^2$ である。中, ψ_0 を求めるに際し未知定数 $C_m(k), D_m(k)$ を導入して式(4)と同形にポテンシャルを仮定して, 変位を算出して境界条件を用いれば, $C_m(k), D_m(k)$ は A_m, B_m を含んで決定される。さらに, 基礎構造物に及ぼす ψ_0 の影響を論ずるには式(4)で表示された円筒波を再び平面波に変換する必要がある。指数関数と三角関数の積に関して次の関係が導かれる。

$$e^{i k_m z} \cos k x = e^{i k_m z} (e^{i k x} + e^{-i k x}) / 2 = \{ e^{i k_m r \sin(\theta + \beta)} + e^{i k_m r \sin(\theta - \beta)} \} / 2 \quad (5)$$

ここに $\tan \alpha = k / k_m$, $\tan \beta = -k / k_m$ である。式(5)より Jacobi の展開定理を用いてベッセル関数 $J_m(z)$ で円筒波に変換できる。たとえば式(5)については次式となる。

$$e^{i k_m z} \cos k x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(k_m r) \cdot \cos 2n\theta \cdot i^n \left\{ \left(\frac{k + \nu_k}{k_m} \right)^{2n} + \left(\frac{k - \nu_k}{k_m} \right)^{2n} \right\} - J_{2m}(k_m r) \cdot \sin(2m+1)\theta \cdot i^{2m+1} \left\{ \left(\frac{k + \nu_k}{k_m} \right)^{2m+1} - \left(\frac{k - \nu_k}{k_m} \right)^{2m+1} \right\} \quad (6)$$

以上より地盤内散乱波・反射波は次式で表示できる。ただし θ に関しては, 構造物に作用する震動圧を計算する際に, 三角関数の直交条件より n の高次項は消去されるので $n=1$ の場合のみについて考慮している。

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m H_m^{(0)}(k_m r) + (A_m a_m + B_m b_m) J_1(k_m a) \} \cdot \sin \alpha_m z \cdot \sin \theta \cdot e^{i\omega t}, \quad \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \{ (A_m b_m + B_m d_m) J_1(k_m a) + B_m H_m^{(0)}(k_m r) \} \cdot \sin \alpha_m z \cdot \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (7)$$

係数 $a_m \sim d_m$ は次式で与えられる。

$$a_m = \frac{4i}{\pi k_m} \int_0^{\infty} \frac{\nu_k (k^2 + \nu_k \nu_a)}{k^2 - \nu_k \nu_a} e^{-i k_m z} dk, \quad b_m = \frac{8i}{\pi k_m k_m} \int_0^{\infty} \frac{\nu_k k^2}{k^2 - \nu_k \nu_a} e^{-(\nu_k + \nu_a) B} dk, \quad d_m = \frac{4i}{\pi k_m} \int_0^{\infty} \frac{k^2 (k^2 + \nu_k \nu_a)}{\nu_a (k^2 - \nu_k \nu_a)} e^{-i k_m z} dk \quad (8)$$

$y = -B$ に境界壁が存在しない場合には, $B \rightarrow \infty$ となって式(8)の係数 $a_m \sim d_m$ はゼロとなり式(7)は従来の解析結果より与えられている散乱ポテンシャルと一致することはいうまでもない。

3. 基礎構造物の曲げ振動解析

構造物が曲げ振動を行なう時, その変形関数を $U_p(z)$ とすれば, 強制振動に伴う地盤の相対変位も考慮に入れて $r=a$ で構造物と地盤が一体となって振動するという条件より, $U_p(z)$ も含んで A_m, B_m は求められる。さらに式(7)より $r=a$ において構造物に作用する震動圧 $P_g(z, U_p)$ は演算の結果次式で与えられる。

$$P_g(z, U_p) = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_s \pi a^2 \omega^2 z_m^2 \left\{ \frac{z}{H} U_p(z) \cdot \sin \alpha_m z \, dB - \frac{z U_p}{\alpha_m H} \left(\frac{\omega}{\omega_{g3m}} \right)^2 \right\} \cdot \Omega_m(k_m a, k_m a) \cdot \sin \alpha_m z \cdot e^{i\omega t} \quad (9)$$

ここに, $\Omega_m(k_m a, k_m a) = \{ A_m H_m^{(0)}(k_m a) + B_m H_m^{(0)}(k_m a) \} + \{ A_m a_m + B_m b_m \} J_1(k_m a) + \{ A_m a_m + B_m d_m \} J_1(k_m a)$

一方, 任意の側方外力が作用する場合のはりの曲げ振動による変形 $U_p(z)$ は次式となる。

$$U_p(z) = \int_0^L f^*(z, \xi) \{ P_g(\xi, U_p) + \rho_s \pi a^2 \omega^2 U_g \} d\xi \quad (10)$$

式(10)の $f^*(z, \xi)$ は片持ばりの $z = \xi$ に単位の定常荷重が作用した場合の ξ 点における変位を表わす関数である。同式の積分の中に未知関数 $U_p(z)$ を含んでおり, Fredholm の第2種積分方程式となっている。この積分方程式は片持ばりの固有関数 $\eta(k, z)$ を用い, $U_p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \eta(k, z)$ において式(10)に代入すれば容易に解き得て, 係数 S_k に関して次の連立方程式を得ることができる。

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{ (\omega_{\nu}^2 + i2\beta_{\nu}\omega_{\nu}(\omega - \omega_{\nu}^2)) \delta_{\mu\nu} - \omega^2 Q_{\mu\nu} \} S_{\nu} = U_g Q_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= -2 \frac{\beta_{\nu}}{\beta_{\mu}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{U_{\mu\nu}}{\omega_{\nu}} \right) Q_m(k_{\mu} a, k_{\nu} a) \frac{1}{k_{\nu}} \int_0^1 \eta(k_{\nu} z) \sin \omega_{\nu} z dz \frac{1}{H_0} \int_0^1 \eta(k_{\mu} z) \sin \omega_{\mu} z dz \\ Q_{\mu} &= -2 \frac{\beta_{\nu}}{\beta_{\mu}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\mu} H} Q_m(k_{\mu} a, k_{\nu} a) \frac{1}{k_{\nu}} \int_0^1 \eta(k_{\nu} z) \sin \omega_{\nu} z dz + \frac{1}{k_{\mu}} \int_0^1 \eta(k_{\mu} z) dz \end{aligned} \quad (12)$$

$\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーのデルタ、 $\omega_{\nu}^2 = E I k_{\nu}^4 / \rho \pi a^2$ 、 $2\beta_{\nu} = \nu^2 I k_{\nu}^4 / \rho \pi a^2$ であり、 EI は曲げ剛性、 ν は粘性減衰係数、 k_{ν} で片持ちり曲げ振動の ν 次の固有値を表わす。式(11)の連立方程式を解くことによって基礎構造物の変形を決定し得る。また、本解析では定常正弦投入を仮定しているが、任意地震投入に対する時間応答解析も式(11)より、周波数伝達関数の考えを用い、逆フーリエ変換を利用すれば困難なく計算し得る。

4. 剛性と減衰に関する考察

式(11)において、高次項の影響は地中構造物ではとくに小さくなると考えられるので、第1次近似として $\mu=\nu=1$ の場合について考察を加えることとし、 $-\omega^2 Q_{\mu\nu} = R(\omega) + iI(\omega)$ とすれば、式(11)は次のように変形され得る。

$$\{ \omega_1^2 + R(\omega) + i2\omega\omega_1 \{ k_1 + I(\omega)/\omega\omega_1 \} - \omega^2 \} \cdot S_1 = U_g \omega_1^2 Q_1 \quad (13)$$

上式の右辺は周辺の地盤の影響を考慮した等価外力項であり、左辺は系の伝達関数と考えることができる。地盤の影響によって、構造物が地上にある場合に比して、それぞれ $R(\omega)$ 、 $I(\omega)$ 、 $\omega\omega_1$ だけ固有振動数と減衰定数が増加したものと見なし得る。固有振動数の増加を基礎構造物の見掛け上の剛性の増加と見なし、もとの剛性との比率を ΔEI とし、減衰定数の増加を $\Delta \beta$ とすればそれぞれ次式で計算し得る。

$$\Delta EI = 1 + R(\omega)/\omega_1^2, \quad \Delta \beta = I(\omega)/(2\omega\omega_1) \quad (14)$$

5. 数値計算結果および考察

境界壁の影響は結局式(8)の $a_m \sim d_m$ の係数によって左右される。この積分計算はCauchyの主値の意味で已分積分法によって数値計算し、それに留数項を加えて値を求めている³⁾。

Fig.2は $R(\omega)$ の振動数特性を B/a をかえて検討したものである。 $B/a=20$ では、各振動に対して $B/a \rightarrow \infty$ の場合とほとんど一致するが、 $B/a=5$

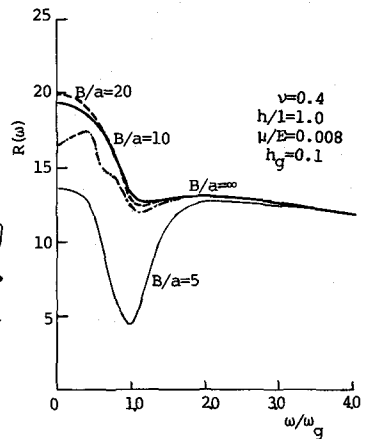


Fig.2 Frequency characteristics of $R(\omega)$

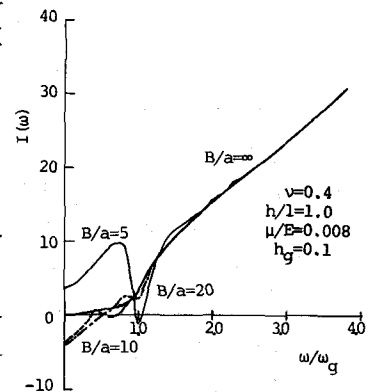


Fig.3 Frequency characteristics of $I(\omega)$

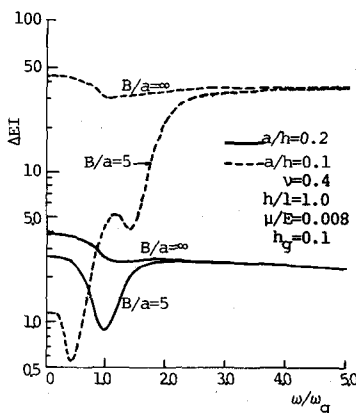


Fig.4 Frequency characteristics of ΔEI

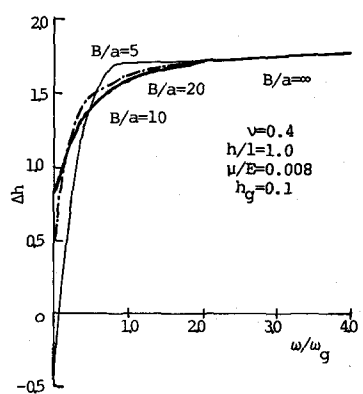


Fig.5 Frequency characteristics of $\Delta \beta$

付近では共振振動数近くでの値の低下が著しく、地盤が共振状態にある時、境界壁の影響がとくに大きいことが知られる。Fig. 3は同様に $I(\omega)$ の特性について検討した結果である。共振振動数以下で境界壁の影響が大きくそれ以上では、 $I(\omega)$ は振動数と1次正比例の関係にあって波動エネルギー消散による減衰は粘性減衰と同様の性質をもつことが知られる。

Fig. 4は式(14)によって計算した剛性の増分と振動数の関係を a/R が0.1, 0.2の場合について示している。 $B/a \rightarrow \infty$ で境界壁の存在しない時には、剛性の増分は振動に対してほとんど変動せず一定値をとってくる。しかし、 $B/a=5$ の場合には $\omega/\omega_g=2.0$ 付近までは変動が著しく、増分は小さくなっている。しかもこの傾向は a/R が0.1の時に顕著である。したがって、小さな振動数の範囲では、Slenderな基礎構造物とは境界壁の存在によって振動振幅が大きくなる可能性がある。Fig. 5は同様に減衰の増分と振動数の関係を示している。 $B/a=10.0$ で境界壁のない場合と一致しており、 $\omega/\omega_g > 1.0$ では一定値となる。Fig. 6は剛性と減衰の増分に与える境界壁の影響を調べたものである。 $B/a=10 \sim 15$ では、 ΔEI , Δh の両者とも $B/a \rightarrow \infty$ の時の値との差は1~2%である。したがって、これらのパラメーターの場合では、基礎構造物の径の10倍程度離れれば壁の影響を考えなくてよいという結果になる。影響が及んでいない距離を求めるのに、構造物の細長比 a/R 、地盤の内部粘性減衰定数 h_g は支配的な要因であると考えられる。

Fig. 7, Fig. 8には、それぞれ、 ΔEI , Δh と a/R の関係を共振振動数の場合について図示してある。 $B/a \rightarrow \infty$ では ΔEI と a/R は片対数紙上でほぼ直線となるが、 $B/a=5$ では a/R が小さい時に剛性増分割合は著しく小さくなってくる。これらの傾向は減衰増分についても同様である。

Fig. 9には h_g の影響を示した。内部減衰が大きくなれば波動伝播過程で地盤内に吸収されるエネルギーが大きくなり境界壁の影響が少なくなるので、 h_g の増加につれて、 $B/a=5$ の曲線は $B/a \rightarrow \infty$ のそれに近づいていく傾向が見られる。

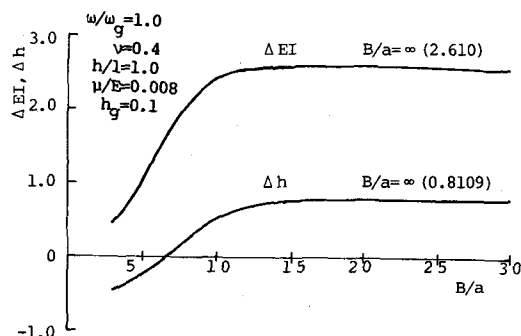


Fig. 6 Effects of B/a on ΔEI and Δh

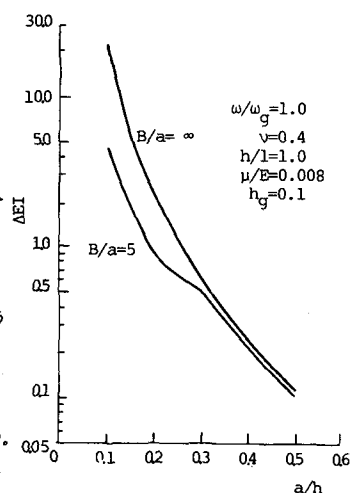


Fig. 7 Relationship between ΔEI and a/h

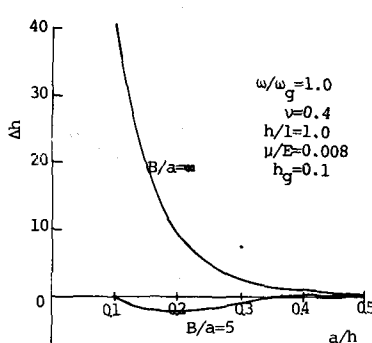


Fig. 8 Relationship between Δh and a/h

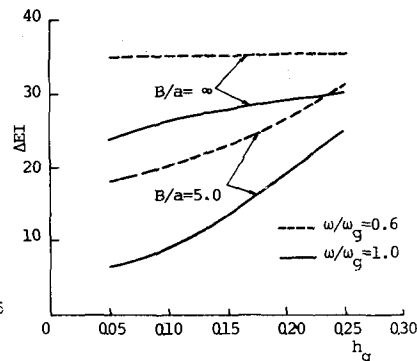


Fig. 9 Relationship between ΔEI and h_g

1) 佐藤尚男・北恵三・高田至郎：地中基礎構造物の振動特性について、京大工学部研究年報，148A，1971，pp. 263~282。

2) U.R. THIRUVENKATACHARI & K. VISWANATHAN: Dynamic Response of an Elastic Half Space with Cylindrical Cavity, J. M.I.M. Vol. 14, No. 4 (1965), pp. 541~570。

3) 目黒貞良：建物と地盤の相互作用(地震工学)，半無限弾性半空間上の点加振による波動伝播，彰國社，1968，pp. 91~105。