

1. まえがき

有限要素法による動的応答解析手法のうち直接積分法あるいは *Step by Step* 法の系列に属する手法を用いてフィルダムの弾塑性解析を試みる。*Step by Step* 法は安定性に注意を要するが非線形動的応答解析に適した方法であり、さらに線形な構造物の短時間応答にも利点のある方法といえる。最初にこの系列に属する手法のうち、微小な時間増分で質量系の加速度が線形に変化するという仮定をおいた手法のいくつかについてフィルダムをモデルにして線形解析を行なって、検討する。次に、非線形解析においては重要な初期応力を推定するため、フィルダムが順次築造されていく過程を追いつながら解析していく「築堤解析」を適用する。フィルダムを構成するエヤ岩塊のマスは拘束圧力によってその材料特性が著しく変化するとともに、一定の拘束圧力下でも応力-ヒズミ関係は非線形性を示す。築堤進行中に発生する応力は複雑に変化していき、から築堤終了時におけるフィルダムの応力と変形状態を推定するには、材料の複雑な力学特性を考慮に入れて行なう必要がある。ここでは、水圧的応力の影響を考慮した Drucker-Prager 降伏条件に等方性の仕事硬化を組み合わせて、農林省が建設したアスファルトフェイシングタイプの深山ダムの解析を行ない、同時に Duncan 等が提案している構成方程式を用いて解析した結果とクロスアームによる実測値との比較を行なって築堤解析による初期応力推定について論ずる。上述の準備をしたうえで、本論の地震力による動的弾塑性応答解析について述べる。材料の非線形性を考慮した動的解析においては、材料が受ける応力履歴を考慮に入れ、負荷・除荷の繰返しも追跡可能としなければならないが、Duncan 等の構成方程式を用いたのでは困難があるため Drucker-Prager の降伏条件を適用して、築堤解析から動的応答解析まで弾塑性解析として首尾一貫させる。

2. *Step by Step* 法による応答解析について

系の運動方程式はマトリックス形式で次式のように表わされる。

$$[M]\{\ddot{X}\}_t + [C]\{\dot{X}\}_t + [K]\{X\}_t = \{P\}_t \quad \text{-----} \quad (1)$$

ここに $[M]$; 質量マトリックス, $[C]$; ダンピングマトリックス, $[K]$; スチフネスマトリックス, $\{P\}_t$; 荷重ベクトル, $\{X\}_t$; 系の変位ベクトル, $\{\dot{X}\}_t$; 系の速度ベクトル, $\{\ddot{X}\}_t$; 系の加速度ベクトル

離散化した質量系の加速度が微小な時間増分では線形に変化するという仮定をおいて (地震力による応答解析では適切と考えられる), 時間間隔 $t - \Delta t$ と t について直接積分すると, 時間 t における速度と変位が求まる。

$$\{\dot{X}\}_t = \{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_t \quad \text{-----} \quad (2)$$

$$\{X\}_t = \{X\}_{t-\Delta t} + \Delta t\{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{6}\{\ddot{X}\}_t \quad \text{-----} \quad (3)$$

ダンピングマトリックスについては *Rayleigh damping* を仮定して $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ とする (α, β は定数)。有限要素法の定式化において, 質量マトリックスとしては *consistent mass* と *lumped mass* の二つがあるが *lumped mass* とすれば, 計算機の記憶容量が節約できるという実際上は重要な利点があり, さらに安定な領域が増すという結果が得られていることから, 後者を採用する。

[手法 I ; 普通の *step by step* 法]

(2), (3) 式を (1) 式に代入して, 必要計算を実行すると次に示す式を得る。

$$\{\ddot{x}\}_t = [F] \left[\{P\}_t - \alpha[M]\{a\} - [K]\{b\} + \beta\{a\} \right] \quad \text{----- (4)}$$

$$\{\dot{x}\}_t = \{a\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{x}\}_t$$

$$\{x\}_t = \{b\} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{x}\}_t$$

ここに

$$[F] = \left[(1 + \alpha \frac{\Delta t}{2})[M] + (\frac{\Delta t^2}{6} + \beta \frac{\Delta t}{2})[K] \right]^{-1}$$

$$\{a\} = \{\dot{x}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{x}\}_{t-\Delta t}$$

$$\{b\} = \{x\}_{t-\Delta t} + \Delta t \{\dot{x}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3} \{\ddot{x}\}_{t-\Delta t}$$

最初に時刻 t における加速度を求めて, 速度, 変位を計算する。

[手法 II ; Band *step by step* 法]

手法 I はマトリックスの逆変換を直接必要とする。その場合普通のマトリックス逆変換のサブルーチンがそのまま利用できるが, 記憶容量と計算時間両点でかなり効率が悪い。この点を改良した方法を仮りに Band *step by step* 法と名づけ 次はアルゴリズムを示す。

$$[\bar{K}]\{\bar{x}\}_t = \{\bar{P}\}_t \quad \text{----- (5)}$$

ここに

$$[\bar{K}] = a_2[M] + [K]$$

$$\{\bar{x}\}_t = \{\ddot{x}\}_t + \{A\}_{t-\Delta t}$$

$$\{\bar{P}\}_t = \frac{1}{a_1} \{AP\}_t + a_3[M]\{\ddot{x}\}_{t-\Delta t} + a_2[M]\{A\}_{t-\Delta t}$$

$$\{A\}_{t-\Delta t} = a_4\{\ddot{x}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{a_1}\{\dot{x}\}_{t-\Delta t}$$

$$\{AP\}_t = \{P\}_t - \{P\}_{t-\Delta t}$$

$$a_1 = \frac{\beta \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{6}$$

$$a_2 = (1 + \frac{\alpha \Delta t}{2})/a_1$$

$$a_3 = (1 - \frac{\alpha \Delta t}{2})/a_1$$

$$a_4 = (\frac{\beta \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{3})/a_1$$

$[\bar{K}]$ はスチフネスマトリックスと同じ形をした対称バンドマトリックスであるから, この特性を利用した解法が適用できる。 $\{\bar{x}\}_t$ が求まれば $\{\ddot{x}\}_t$ が得られ, (2), (3) 式より $\{\dot{x}\}_t, \{x\}_t$ も計算できる。

[手法 III ; 修正 *step by step* 法]

前述の二つの解法はいかなる条件においても安定とはいえない。 $t+\Delta t$ における加速度 $\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$ を時間増分 $2\Delta t$ で計算し, t における加速度 $\{\ddot{x}\}_t$ を $\{\ddot{x}\}_{t-\Delta t}$ と $\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$ の平均から計算することにより, unconditionally に安定なアルゴリズムを得る。これは E. L. Wilson が初めて提案した方法である。

[手法 IV ; E. L. Wilson の θ 法]

修正 *step by step* 法は unconditionally に安定であるが, 周波数が高くなると計算上のダンピングが働いてしまう。この点を E. L. Wilson が改良して θ 法と名づけた。ここでは, θ 法に Rayleigh damping を適用して計算効率のよいように工夫したアルゴリズムを示す。

$$[\bar{K}]\{\bar{x}\}_{t+\tau} = \{\bar{P}\}_{t+\tau} \quad \text{----- (6)}$$

ここに

$$[\bar{K}] = [K] + a_3[M], \quad \tau = \theta \Delta t$$

$$\{\bar{x}\}_{t+\tau} = a_1\{x\}_{t+\tau} - \beta\{B\}_t$$

$$\{\bar{P}\}_{t+\tau} = \{P\}_{t+\tau} + [M][\{A\}_t + a_4\{B\}_t]$$

$$\{A\}_t = 2\{\ddot{x}\}_t + \frac{6}{\tau}\{\dot{x}\}_t + \frac{6}{\tau^2}\{x\}_t$$

$$\{B\}_t = \frac{\tau}{2}\{\ddot{x}\}_t + 2\{\dot{x}\}_t + \frac{3}{2}\{x\}_t$$

$$a_1 = 1 + \frac{3}{\tau}\beta, \quad a_2 = \frac{3}{\tau}\alpha + \frac{6}{\tau^2}, \quad a_3 = a_2/a_1, \quad a_4 = \alpha - a_3\beta$$

上記4つの手法によって、高さ $\times 10m$ 、先端幅 $\times m$ 、1:2.5の斜面勾配のフィルダム(弾性係数 $E=5.0 \times 10^3 \text{ t/m}^2$ ポアソン比 $\nu=0.35$ 単位体積重量 $\gamma=2.0 \text{ t/m}^3$)を想定して、要素数60、節点数42のC.F.T.有限要素に分割して解析した。図には先端の加速度のみを示す。時間間隔 Δt は $\frac{1}{100}$ 秒とし、Wilson θ 法では $\theta=1.4$ を採用した。基盤に作用させた地震波はエル・セントロ液で、 $\alpha=1.025$ 、 $\beta=0.002$ とした。

Δt がここに示したように $\frac{1}{100}$ 秒と小さい場合には、いずれの手法によっても、ほとんど同じ結果が得られるといえよう。ただし、手法Ⅰは計算効率が他の手法に比して悪い。また手法Ⅲはわずかではあるが計算上のダンピングと位相のズレがみられるが実用上は問題ないと思われる。

3 築堤解析による初期応力の推定

フィルダムのように巨大で、かつ順次築造されている構造物については、材料がたとえ弾性体であるとしても、築堤過程を考慮にいれた解析を行なうことの必要性が理論的に明らかにされている。実際のフィルダムの築造においては、積みあげられていく層数は莫大なものであるが、築堤解析においては、できるだけ少ない層数でシミュレートしたい。このために、新しく積み

あがれる層を重い液体のように扱い前に積みあげられている層とのせん断力を減らすようにし、かつ新しく積みあがれる層の頂部変位を消去していく方法によって、有限の層数で実際の過程を追跡できる。

フィルダムを弾塑性的に扱うためにDrucker-Pragerの降伏条件を用いるが、それは次式で与えられる。

$$f = \alpha I_1 + J_2^{\frac{1}{2}} - K = 0 \quad (7)$$

ここに

$$I_1 = \tau_{ii}, \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad s_{ij} = \tau_{ij} - S \delta_{ij}, \quad S = \frac{1}{3} \tau_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad \alpha: \text{定数}, K: \text{仕事硬化のパラメータ}, s_{ij}: \text{フロネッカーのデルタ}$$

associated flow rule が土、ロックに適用可能という仮定において、平面ヒズミ状態で, Mohr-Coulomb の降伏条件

$$R = c \cos \varphi - \frac{1}{2} (\tau_{11} + \tau_{22}) \sin \varphi, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2}, \quad c: \text{粘着力}, \varphi: \text{内部摩擦角と等価におくと}$$

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad K = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad (8)$$

を得る。

フィルダムは降伏後に仕事硬化を示すとして、等方性の仕事硬化を仮定して弾塑性マトリックスを求めると次のようになる(Dibaj, Penzienの方法に従って)。

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_p \quad (9)$$

$[D]_e$ は平面ヒズミ状態における弾性マトリックスで、 $[D]_p$ は次式で与えられる。

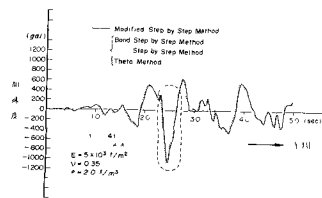


図-1 フィルダム先端における応答加速度

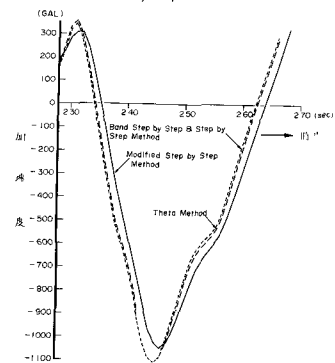


図-2 図-1の点線で囲った部分の拡大図

$$[D]_p = \frac{2E}{1+\mu} \cdot \frac{1-\mu}{A} \begin{bmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & B_1B_3 \\ B_2B_1 & B_2^2 & B_2B_3 \\ B_3B_1 & B_3B_2 & B_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

二に

$$A = 2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2(1-\mu)} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau_{12}^2}{R^2} \right) (1-\mu) + \frac{3}{5} \left(C \cdot \cos \varphi + \frac{\tau_{12}}{R} \right)$$

$$B_1 = \frac{\sin \varphi}{2(1-\mu)} + \frac{\tau_{12} - \tau_{12}}{4R}$$

$$B_2 = \frac{\sin \varphi}{2(1-\mu)} - \frac{\tau_{12} - \tau_{12}}{4R}$$

$$B_3 = \frac{\tau_{12}}{R}$$

$$\bar{S} = \frac{3}{2} S_{12} S_{12} \text{ (相当応力)}$$

$$\xi = \frac{G_t}{G}$$

G_t : セン断弾性率, G : 塑性状態における接線セン断係数

負荷、除荷の基準は $\frac{\partial f}{\partial \tau_{12}} \delta \tau_{12}$ が正なら負荷 零なら中立応力、負なら除荷状態として与えられる。解析モデルおよび計算された鉛直変位を図-3, 4に示す。実測値と良い一致を示してありしたがって計算による応力は十分初期応力として信頼できると考えられる。(大型三軸試験より $C=0, \varphi=41^\circ$ 、 $E=310 \text{ kg/cm}^2$, $\mu=0.27$, $\xi=0.3$ を採用)

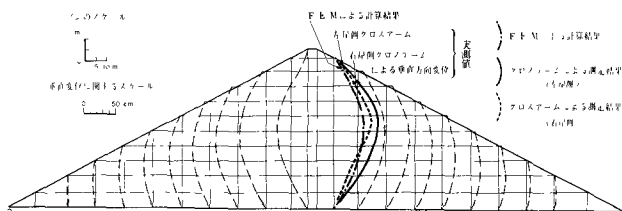


図-3 築堤解析による鉛直方向変位。図には Duncan 等の構成式を用いて計算した変位を示してある。

4. 動的弾塑性応答解析

前述の動的応答解析と弾塑性解析の手法を組み合わせるにより 動的弾塑性応答解析が可能になる。この場合各時間増分毎にスンプネスマトリックスを構成し直しながら *Stagnate Step* に積分を実行しなければならないので線形計算に比して格段に計算時間を要する。要素数144、節点数90 $\Delta t=0.01$ 秒の条件で5秒間の応答を計算するのに CPU 1379秒を要した。しかし実際にはもっと粗い分割で良く、たとえば要素数60、節点数45とした場合10分程度であるから十分使用的と思われる。

なお速度効果を考慮して $E=700 \text{ kg/cm}^2$ とした。

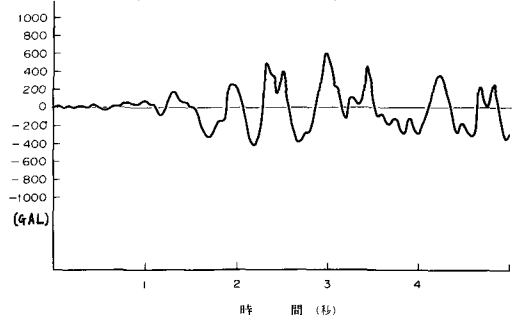


図-5 ダム天端の応答加速度の時間変化。

鉛直変位

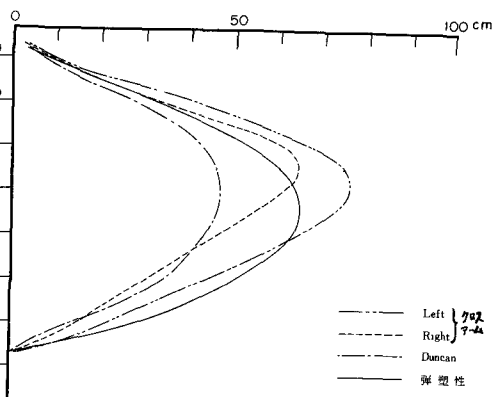


図-4 鉛直変位。図-3の一部を拡大し弾塑性解析の結果を加えた。

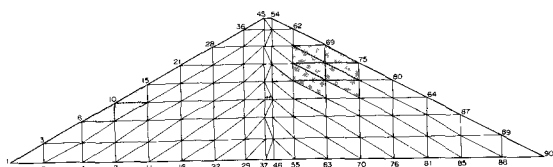


図-6 時刻 0.5 秒における塑性領域。一定の時間毎に図示すれば塑性域の発達状況を把握できる。