

多自由度非線形履歴構造物のランダム応答解析

京都大学工学部 正員 山田善一

京都大学工学部 正員 〇竹宮宏和

1. まえがき

本研究はランダム地震外力を受ける多自由度非線形履歴構造物の応答解析と等価線形化手法と適用して行なったものである。近年、耐震工学において、ランダム振動理論から構造物の線形応答解析と扱うことが多くの人々によってなされているが、多くの土木建築構造物は強震を受けた場合、弾性限を越えた非線形応答を示し地震入力エネルギーの一部を履歴エネルギーとして消散する。合理的耐震設計を目指すにはこれを的確に把握し設計変数として積極的に導入する必要がある。ところで土木建築構造物は多自由度系としてモデル化されることが多く、従って等価線形化手法もこれに見合ったものを本論文では提案している。また、その結果としての等価線形系は非比例減衰系となるので、応答共分散マトリックスを評価するに複素固有値解析を使用した新しい手法を試みている。

2. 等価線形化手法

ランダム入力に対する多自由度非線形系の等価線形化に Krylov-Bogoliubov法を適用した例はこれまでもあるが、特に履歴系に対しては、その履歴周期の評価に注意を払わねばならない。等価線形化の最初のステップは文献(1)に述べられているが、簡単に説明する。いま、 N 自由度非線形履歴系の運動方程式を

$$[M]\{\ddot{Z}\} + [C]\{\dot{Z}\} + \{Q(\{Z\})\} = \{F(t)\} \quad (\dot{=} \frac{d}{dt}) \quad (1)$$

として、ここで $[M]$: 質量マトリックス, $[C]$: 微小線形振動時の減衰マトリックス, $\{Z\}$: 一般に変位ベクトル, $\{Q(\{Z\})\}$: $\{Z\}$ に依存した復元力ベクトル, $\{F(t)\}$: 外力ベクトルである。式(1)に対する等価線形系として次式を定義する。

$$[M]\{\ddot{\bar{Z}}\} + [\bar{C}]\{\dot{\bar{Z}}\} + [\bar{K}]\{\bar{Z}\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

ここで等価粘性減衰マトリックス $[\bar{C}]$ 及び等価剛性マトリックス $[\bar{K}]$ は以下のようにして求められる。すなわち、質点 i と j を連結する非線形バネ剛性を $g_{ij}(x_{ij})$ とし、但し x_{ij} はそれらの間の相対変位である。これに剛性項と粘性減衰項の線形表示を仮定すると、

$$g_{ij}(x_{ij}) = \bar{c}_{ij} \dot{x}_{ij} + \bar{k}_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

式(3)の両辺に x_{ij} 及び $\dot{x}_{ij}$ を乗じてそれらの期待値をとり、更に応答の定常確率過程を想定すると

$$\bar{c}_{ij} = \frac{E[g_{ij}(x_{ij}) \dot{x}_{ij}]}{E[\dot{x}_{ij}^2]} + \bar{c}_{ij}, \quad \bar{k}_{ij} = \frac{E[g_{ij}(x_{ij}) x_{ij}]}{E[x_{ij}^2]} \quad (4)$$

ここで記号 $E[\cdot]$ はランダム変動量の期待値を意味する。こうして得られた等価線形系は式(1)と(2)の誤差の2乗の期待値を最小にする。

本研究では、多自由度非線形履歴系として、図1の質点間が双一次履歴型バネ(図2)で単純連結された系を解析対象とし、これが基盤において加速度入力 $\ddot{z}_g$ を受けたときの挙動を扱う。これは耐震工学分野においてきわめて応用範囲が広い。さて、この場合式(4)中の x_{ij} は相対変位 x_i で置き換える

れら。として解ける組合に、これを $(1-\alpha)K_i$ の剛性を有するバネの伸び $x_{i,s}$ と クーロン スライ
ダーの滑り $x_{i,c}$ とに分ける。すなわち

$$x_i = x_{i,s} + x_{i,c} \quad (5)$$

よって、式(4)は

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_i}{K_i} &= \alpha + (1-\alpha) \frac{E(x_{i,s}, x_{i,c})}{E(x_i^2)} \\ \frac{C_i}{K_i} &= \frac{C_i}{K_i} + (1-\alpha) \frac{E(x_{i,s}, \dot{x}_i)}{E(\dot{x}_i^2)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式中の $E(x_{i,s}, x_{i,c})$ 及び $E(x_{i,s}, \dot{x}_i)$ を評価するに当り、
1自由度双一次履歴系の研究結果^{2), 3)}を考慮すると、履歴
中心の移動は前者にはあまり影響が無く、これを固定して
評価しても良いが、後者には履歴周期を的確に推定しなけ
ればならない。多自由度系は、通常、第1次振動モードの
変位応答に占める割合が大きいので

$$\{x_i\} = \{A_i \cos \phi_i\} \quad (7)$$

と仮定する。として、振中 A_i 、位相 ϕ_i は次の分布をなして
いると考える。

$$P_{\phi_i}(\phi) = (2\pi)^{-1} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (8)$$

$$P_{A_i}(A_i) = \sigma_{A_i}^{-2} A_i \exp(-A_i^2 / 2\sigma_{A_i}^2) \quad A_i \geq 0 \quad (9)$$

もし、応答状態が $A_i > Y_i$ で同一履歴中心を有するとすれば

$$13^\circ \quad x_{i,c} = A_i - Y_i, \quad 0 \leq \phi_i \leq \phi_i^* \quad \text{に対して}$$

$$x_{i,s} = -Y_i, \quad \phi_i^* \leq \phi_i \leq \pi \quad (10)$$

$$x_{i,c} = Y_i - A_i, \quad \pi \leq \phi_i \leq \pi + \phi_i^*$$

$$x_{i,s} = Y_i, \quad \pi + \phi_i^* \leq \phi_i \leq 2\pi, \quad \phi_i^* = \cos^{-1}(1 - \frac{ZY_i}{A_i})$$

この場合

$$E(x_{i,s}, x_i | A_i = a_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_i^2 & , \text{但し } A_i < Y_i \\ \frac{A_i^2}{\pi} \left\{ \left(\left(2 \frac{Y_i}{A_i} - 1 \right) \left\{ \frac{Y_i}{A_i} \left(1 - \frac{Y_i}{A_i} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(1 - 2 \frac{Y_i}{A_i} \right) \right\} \right\} & , \text{但し } A_i \geq Y_i \end{cases} \quad (11)$$

従って、式(6)の第1式は

$$\frac{K_i}{K_i} = \alpha + (1-\alpha) \frac{\int_0^\infty E(x_{i,s}, x_i | A_i = a_i) P_{A_i}(a_i) da_i}{\int_0^\infty E(x_i^2 | A_i = a_i) P_{A_i}(a_i) da_i} \quad (12)$$

これは Cauchy の解⁴⁾と同一になる。1自由度双一次履歴系に対するシミュレーションとの比較によ
り、降伏比 α がさほど小さくないときは、式(12)は精度は良いが、 $\alpha \ll 1$ に対しては $E(x_{i,s}, x_{i,c}) = 0$ と
仮定して誘導される

$$\frac{K_i}{K_i} = \alpha + (1-\alpha) \frac{\int_0^\infty E(x_{i,s}^2 | A_i = a_i) P_{A_i}(a_i) da_i}{\int_0^\infty E(x_i^2 | A_i = a_i) P_{A_i}(a_i) da_i} \quad (13)$$

と著者は提案している³⁾。但し

$$E(x_{i,s}^2 | A_i = a_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_i^2 & , A_i < Y_i \\ Y_i^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3}{2} \frac{A_i}{Y_i} \left(\frac{A_i}{Y_i} - \frac{4}{3} \right) \cos^{-1} \left(1 - 2 \frac{Y_i}{A_i} \right) - \left(3 \frac{A_i}{Y_i} - 2 \right) \left(\frac{A_i}{Y_i} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] & , A_i \geq Y_i \end{cases} \quad (14)$$

文献(3)には他の手法も試みられているが、その式の複雑さに比べてどれほどの精度向上にはなってい
ないので、本研究では式(13)を採用する。

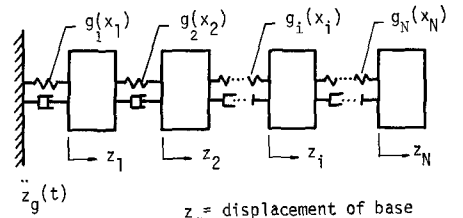


図1. 多自由度非線形履歴系

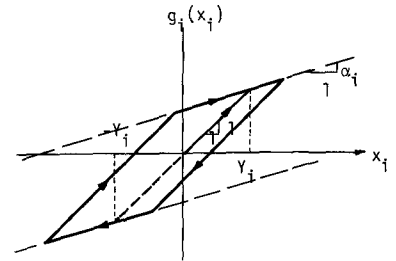


図2. 双一次履歴復元力特性

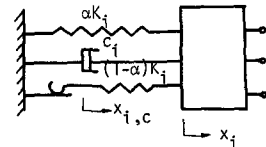


図3. 双一次履歴系の力学モデル

次に、等価粘性減衰係数を式(6)のオズ式から計算するのであるが、多自由度系の場合履歴周期を推定することが困難である。そこで $E(x_{i,s}, \dot{x}_i)$ を評価するに、ここでは直接 $x_{i,s}$ と $\dot{x}_i$ の同時確率密度関数を導入する。すなわち

$$E(x_{i,s}, \dot{x}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{Y_i}^{Y_i} x_{i,s} \dot{x}_i P(x_{i,s}, \dot{x}_i) dx_{i,s} d\dot{x}_i \quad (15)$$

ここで $|x_{i,s}| = Y_i$ 以外では $x_{i,s}$ は x_i の線形表示となり、 $P(x_{i,s}, \dot{x}_i)$ はガウス分布と考えられるので $E(x_{i,s}, \dot{x}_i) = 0$ となる。従って式(15)は $|x_{i,s}| = Y_i$ の近傍のみの $P(x_{i,s}, \dot{x}_i)$ を推定すればよい。

Kaul⁽⁴⁾ が変位 $\dot{x}_i$ とバネ力 $(1-\alpha)Kx_{i,s}$ に対して物理的に考察したことを $P(x_{i,s}, \dot{x}_i)$ に行なえば

$$P(x_{i,s}, \dot{x}_i) = \left(\frac{E(x_{i,s}^2)}{Y_i^2} \right)^m \delta(|x_{i,s}| - Y_i) P(\dot{x}_i) \quad (16)$$

ここで $m \geq 2$, $P(\dot{x}_i)$ は $\dot{x}_i$ の確率密度関数である。

式(12)と式(11)に代入して、 $x_{i,s}, \dot{x}_i \geq 0$ を考慮し、 $P(\dot{x}_i)$ に Gauss 分布を仮定すれば

$$E(x_{i,s}, \dot{x}_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{E(x_{i,s}^2)}{Y_i^2} \right)^m E(\dot{x}_i^2) Y_i \quad (17)$$

ゆえに式(6)のオズ式は

$$\frac{C_i}{K_i} = \frac{C_i}{K_i} + (1-\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{E(x_{i,s}^2)}{Y_i^2} \right)^m \frac{Y_i}{\sigma_{\dot{x}_i}} \quad (18)$$

$$\text{但し } \sigma_{\dot{x}_i} = (E(\dot{x}_i^2))^{\frac{1}{2}}$$

式(13), (18)による等価線形化手法の精度の検証の1例

を図4に示す。ここでは外力のホワイト・ノイズ $n(t)$ に対する1自由度双一次履歴系の応答を解析している。^{2), 3)} また $m=4$ を式(18)で採用している

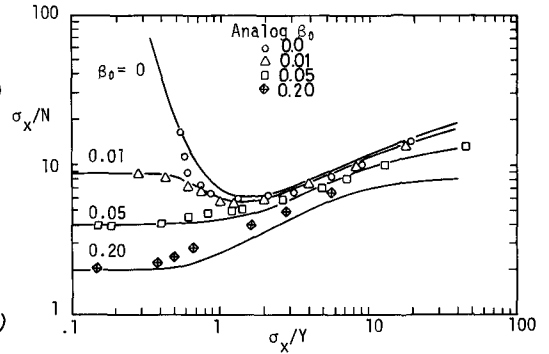


図4 双一次履歴系の rms 変位応答

3. 応答共分散マトリックス

式(2)で表わされる系のランダム応答解析をする時に、最も重要なものは、応答共分散マトリックス

$$[R_y] = \begin{bmatrix} E\{\{\dot{y}\}^T \{\dot{y}\}\} & E\{\{\dot{y}\}^T \{y\}\} \\ E\{\{\dot{y}\}^T \{y\}\} & E\{\{y\}^T \{y\}\} \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。また式(2)の入力が地震加速度によるものであると、その振動数成分はある種のピークを有する。これまで種々の方法で模擬することが提案されて来ているが、その一つとして、filtered shot noise がある。いま フィルター作用を1自由度線形系で行ない、すなわち

$$\ddot{x}_0 + 2\zeta_g \omega_g \dot{x}_0 + \omega_g^2 x_0 = n(t) \quad (20)$$

の絶対加速度 $\ddot{x}_g = \ddot{x}_0 - n(t)$ を地震加速度として採用する。 $n(t)$ は $E(n(t)) = 0$, $E(n(t)n(t+\tau)) = 2\pi S_n \delta(\tau)$ とする。この場合、式(2)は $\{m\}\{\ddot{y}\} + \{c\}\{\dot{y}\} + \{k\}\{y\} = -\{m\}\{1\}\ddot{x}_g(t)$ (21)

式(20), (21)を連成させるに当り、ベクトル $\{\ddot{y}\} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_{(N+2) \times 1}$ を用いると

$$\{\tilde{m}\}\{\ddot{y}\} + \{\tilde{c}\}\{\dot{y}\} + \{\tilde{k}\}\{y\} = \{\tilde{F}\}n(t) \quad (22)$$

ここで $\{\tilde{m}\} = \begin{bmatrix} \{m\} & \{m\}\{1\} \\ \{0\} & 1 \end{bmatrix}_{(N+2) \times (N+2)}$, $\{\tilde{c}\} = \begin{bmatrix} \{c\} & \{0\} \\ \{0\} & 2\zeta_g \omega_g \end{bmatrix}_{(N+2) \times (N+2)}$, $\{\tilde{k}\} = \begin{bmatrix} \{k\} & \{0\} \\ \{0\} & \omega_g^2 \end{bmatrix}_{(N+2) \times (N+2)}$, $\{\tilde{F}\} = \begin{bmatrix} \{m\}\{1\} \\ 1 \end{bmatrix}_{(N+2) \times 1}$

式(22)から応答共分散マトリックス, 式(19)を算出するに, まずこれにステートベクトル $\{u\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}_{2(N+1) \times 1}$ を導入して

$$\{\dot{u}\} + [D]\{u\} = \{p\}n(t) \quad (23)$$

ここに $[D] = \begin{bmatrix} (\tilde{m})^{-1}[\tilde{c}] & (\tilde{m})^{-1}[\tilde{k}] \\ -[I] & [0] \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)} \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \frac{1}{\omega} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_{2(N+1) \times 1}$

式(23)の解は $\{u\} = \int_0^t e^{(D)(t-\tau)} \{p\}n(\tau) d\tau \quad (24)$

で与えられる。次に $[R_u] = E\{\{u\}^T \{u\}\}$ に関する微分方程式を 式(23)の後から $\{u\}^T$ を乗じた結果と同じ式を転置に前から $\{u\}$ を乗じた結果を加え合せ, 期待をとって作る。すなわち

$$\frac{d}{dt}[R_u] + [D][R_u] + [R_u][D]^T = 2\pi s(t)[\{Q\}[\{Q\}]^T] \quad (25)$$

ここで右辺を算出するに式(24)及び $n(t)$ の性質を用いている。しかし, 式(25)は自由度 N が大きいと解くのが困難となる。そこで, 式(23)を複素固有値解析して, 上と同じ操作をすると

$$\frac{d}{dt}[R_r] + [\lambda_r][R_r] + [R_r][\lambda_r]^* = [G] \quad (26) \quad \text{但し } [G] = 2\pi s(\omega)[\{P\}\{P\}^*][\{Q\}]^T$$

そして $[R_u] = [\Phi][R_r][\Phi]^T \quad (27)$

上式中, λ_i は $|\lambda| - \lambda I = 0$ の複素固有値, $[\Phi]$ はその固有ベクトルからなるマトリックスである。式(26)の解は容易に求まり⁵⁾

$$[R_r] = \left[\frac{G_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j^*} \{1 - e^{-(\lambda_i + \lambda_j^*)t}\} \right] \quad (28)$$

4. 計算例

解析例として 33 階建のビルディングを 5 質点系に置換したもの⁶⁾を採用した。この線形時減衰マトリックスは各次固有モードが同一減衰率を有するとして $[C] = 2\beta_0[m]^{1/2}([m]^{-1/2}[K][m]^{-1/2})^{1/2}[m]^{1/2}$ を使用した。また地震動の確率模擬は文献(7)の FLS3 である。解析結果については当日発表の予定である。

参考文献

- 1) Iwan, W.D., and Yang, I.-M.: Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems, J. of Appl. Mech., June, 1972, pp.545-550
- 2) 竹宮: 不規則外力を受ける双一次履歴系の等価線形化について, 土木学会論文報告集, 才219号, 1973年11月, pp.1-13
- 3) Lutes, L.D., and Takemiya, H.: Random Vibration of A Yielding Oscillator, J. of ASCE, EM Div. (to appear)
- 4) Kaul, M.: Stochastic Inelastic Response of Offshore Towers to Strong Motion Earthquakes, EERC 72-4, Aug., 1972
- 5) Takemiya, H.: Random Response Analyses of Multi-degree-of-freedom Systems With Non-proportional Damping And Its Application to the Tower-and-pier System of Long-span Suspension Bridges, 関東地震 50 周年記念シンポジウム講演集, 1973年8月, pp.373-380
- 6) SERAC Committee: SERAC Report No.5, Part V, 1964, pp.177-234
- 7) Amin, M. and Ang, A.H.-S.: Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions, J. of ASCE, EM2, April, 1968, pp.559-583