

1 はじめに

近年の地下構造物の巨大化、長大化のすう勢に伴って、これら地下構造物の挙動をより適確に把握し、合理的な設計法と安全性について、より詳細な検討を加えることが必要となってきた。地盤や岩盤は構成物質の特性ならびに地質学的な種々の不連続性のために極めて複雑な挙動を呈し、また地下構造物もこれらの中に埋設された異質物体として、地盤や岩盤とは異なつた特異な挙動を呈すると考えられる。現段階では、これら構造物-地盤系の挙動を厳密に解析することは一般に困難である。しかしながら、構造物-地盤系の全体的な挙動を大まかに把握する場合には、第1近似としては、この種の問題は弾性体中に開削された空洞周辺の挙動として、近似して解析すれば十分目的を達する場合も多いと考えられる。

本論文は、このような考えに基づいて、弾性体中に開削された任意形状の空洞について、地震波とか近接破壊などによる進行波に伴って生じる過渡応力状態を解析したものである。過渡状態の解析法としては、いわゆるモーダルアナリシスにより、調和解を重ね合せる方法によつた。この際必要となる調和解は、Helmholtz の方程式を解くことにより求められる。調和解を求める方法としては、本論文では、最近注目されるようになった、弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させて解く方法を用いた。この方法によつて、従来からよく用いられている解法(固有関数を用いた級数展開による方法¹⁾)では解くことのできなかつた任意形状空洞の場合をも取り扱った。

2 Helmholtz の方程式とその積分方程式による解法

弾性波の基礎方程式を積分方程式に変換することを考える。以下の記述では、直交直線座標(x_1, x_2, x_3)を用い、添字を用いた成分表示を行なうものとする。等方均質な線形弾性体の運動方程式、構成式ならびに変位とひずみの関係は、次のように書き表わされる。

$$\tau_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}), \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1), (2), (3)$$

ここに、 i, j, k は 1, 2, 3 とし、また総和規約を適用するものとする。 $\tau_{ij}, \epsilon_{ij}, \mu, \lambda, f_i$ および δ_{ij} は、それぞれ応力テンソル、ひずみテンソル、変位ベクトル、物体力ベクトルの各成分および Kronecker のデルタを表わし、 λ, μ は Lamé の定数を、 ρ は密度を表わすものとする。また、 $\tau_{ij,j} = \partial \tau_{ij} / \partial x_j$, $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$ などを意味するものとする。

式(1)に式(2)、式(3)を代入すると、Navier-Cauchy の式が次のように求められる。

$$(\lambda + \mu) u_{jji} + \mu u_{i,jj} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (4)$$

いま、物体力が省略でき、また系全体が定常調和運動状態にあると仮定しよう。この場合には、系の固有振動周期と異なる円振動数 ω を用いて、時間と空間座標を次のような形で分離することが

可能である。すなわち

$$u(x, t) = R\{u_j(x) e^{-i\omega t}\} \quad (5)$$

とし、(ここに R は実数部を取るという意味である)、新しい関数 $u_j(x)$ を導入することにより、式(4) を場所だけの座標系に変換することが出来る。式(5) を式(4) に代入して 結局次式を得る。

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{j,11} + C_2^2 u_{j,22} + \omega^2 u_j = 0 \quad (6)$$

ここに、 $C_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $C_2^2 = \mu/\rho$ であり 縦波および横波の速度の2乗を表わしている。ここが新しい演算子

$$\Delta^* = (C_1^2 - C_2^2) \text{grad} \nabla \cdot + C_2^2 \nabla^2 = (C_1^2 - C_2^2) \partial_j \partial_j + C_2^2 \partial_j \partial_j$$

を導入すると、式(6) は次のように書くことができる。

$$(\Delta^* + \omega^2) u_j = 0 \quad (7)$$

この式は、これから対象とする境界値問題の基礎方程式であり、Helmholtz の式と呼ばれる。

次に、微分方程式 (7) を積分方程式に変換することを考える。式(4) を満足する関数、 u_i, V_i を考えて、これは、領域 $D + \partial D$ の2階の導関数まで連続であると仮定しよう。また、簡単のために、 $L = \Delta^* + \omega^2$ と記すことにすると、Green の定理を用いて 次式が求められる。

$$\int_D (\nabla \cdot L u - u \cdot \nabla \cdot L u) dV = \int_{\partial D} (u \cdot T^* u - u \cdot T^* u) dS \quad (8)$$

$$\text{ここに、} T^* u = (C_1^2 - C_2^2) \nabla \cdot u + C_2^2 \nabla \cdot \text{grad} u$$

であり また ∇ は ∂D 上の外向き単位法線ベクトル n である。

次に、微分方程式 (7) に対応した微分方程式

$$L \Gamma(P; Q) = -\delta(P; Q) \quad (9)$$

を考える。ここに、 P, Q はそれぞれ観測点および源点を意味し、また $\delta(P; Q)$ は $P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3)$ とすると、 $\delta(P; Q) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3)$ で与えられるデルタ関数である。また式(8) を満たす $\Gamma(P; Q)$ は、基本解または主要解と呼ばれる。

式(8)において、 u, ∇ の代りに $\bar{u}, \bar{\nabla}$ を代入すると、次のような積分方程式が得られる。

$$\bar{u}(P) F(P) = \int_{\partial D} \{ \bar{\Gamma}(P; R) T^* \bar{u}(R) - \bar{u}(R) T^* \bar{\Gamma}(P; Q) \} dS \quad (10)$$

$$\text{ここに} \quad F(P) = \begin{cases} 1 & P \in D \\ \frac{1}{2} & P \in \partial D \\ 0 & P \notin D, P \notin \partial D \end{cases}$$

また、 $R \in \partial D$, すなわち、 R は境界上の任意点を意味している。式(10)は 微分方程式(7) に対応する基本の積分方程式である。一般に、基本解 $\bar{\Gamma}$ は容易に求められるので、式(10) から分るように境界上の積分だけを行えば、任意点の変位が求められる、したがって応力が求められることになる。

本論文では、平面応力問題に限るとして以下の議論を進める。(3次元問題では、基本解が異なるだけであり、同様の取り扱いができる。) 2次元の基本解は、 2×2 のグリーニ・マトリクスとなる。その要素 $\bar{f}_{ijk}$ は次のように与えられる。

$$\bar{f}_{ijk} = \frac{c}{4\pi} \left[H_0^{(0)}(z_2 r) \delta_{ijk} - \frac{1}{z_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \{ H_0^{(0)}(z_1 r) - H_0^{(0)}(z_2 r) \} \right] \quad (11)$$

ここに、 $z_1 = \omega/c_1$, $z_2 = \omega/c_2$, $r = \sqrt{(x_i - x_{i0})(x_i - x_{i0})} = \overline{PQ}$, $H_0^{(0)}(z_n r)$ は 0 次第 1 種の Hankel 関数である。

3. 数値計算法

式(11)で与えられる基本解を、式(10)に代入することによって得られる積分方程式を解けばよい。本論文で述べるような、第1種外部境界値問題では、一重層ポテンシャルに相当する $\bar{f}$ だけを用いる解法が便利であるので、それを採用し、補助境界を導入することによって、上記の特異積分方程式と正則な方程式に置き換えて後、連立一次方程式に近似して解いた。¹⁾ 補助境界を N 個の点により多角形近似し、その多角形の边上で $\bar{u}(R)$, $T^n \bar{u}(R)$ など是一定とすると、式(10)は次のように近似される。

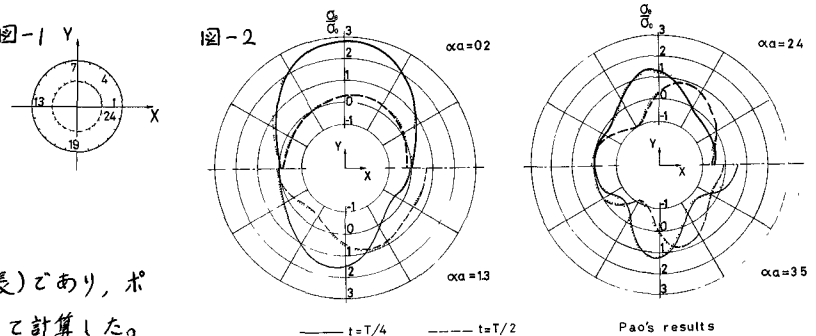
$$\frac{1}{2} \bar{u}(R_m) = \sum_{n=1}^N T^n \bar{u}(R_n) \int_{\partial D} \bar{f}(P, R_m) dS \quad (12)$$

ここに、 R_n, R_m は境界边上の中点を表わすものとする。なお、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、この式は、式(10)に帰着される。(但し、 $T^n \bar{f} = 0$ としている)。式(12)を解けば、 $\bar{u}(R_m)$, $T^n \bar{u}(R_m)$ などが求められ、したがって任意点の値は、この値を式(10)に代入して求められることになる。任意形状波形によって生ずる過渡応答は、このようにして求められる調和解を重ね合せて容易に求められる。なお、このような解は、単位階段波に対する応答を上のようにして求めておけば、Duhamel 積分(数値積分)することによって求めることもできる。

4. 過渡応力状態の計算例

積分方程式による解法の精度を検照する目的で、図-1に示すような円孔を含む平面応力状態にある無限板内を調和平面変位波が通過する場合のフープ応力状態を求め、固有級数展開法で求められている $P_{\alpha 0}$ の解³⁾と比較して図-2に示した。

ここに、 a は円孔の半径、 σ_0 は入力波の最大応力値、 T は波の周期、 α は波数、すなわち、 $\alpha = \omega/c_1 = 2\pi/\ell$ (ℓ : 波長)であり、ポアソン比 $\nu = 0.35$ として計算した。波数によらず、 $P_{\alpha 0}$ の計算結果と極めて



てよい一致を示していることが分る。

次に、円孔を含む無限板に平面ひずみ、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、以下の例は全てこのように考える。)を、単位階段波が通過する際の過渡応力状態を考へる。この際、モードルアナリシスを行なうのど、調和波による波形近似、展開する周期に起因する先行波の擾乱が問題となる。前者に対しては、調和波を20個ほど重ね合わせるにより十分近似され、後者に対しては、図-3に示すように、周期 $L = 4\pi$ (円孔の半径、 $\mu = 1$) とすれば、先行波の擾乱は殆んど認められないことが分る。以下、このような条件で計算を行なつた。

図-4には、単位階段波が進行することによる円孔面上の過渡応力状態を示す。また、図-5には、三角形の波が進行することによる結果を示す。波の位置は、右上の図に示してある。

図-6には、馬蹄形空洞に単位階段波が進行することによ、こ生じる壁面上の過渡応力状態を示す。この際、空洞内気部の半径を $\mu = 1$ とした。

図-7には、一周期の正弦波が円孔を通過する時の過渡応力状態を示す。図-8には、図-7と同じ波長の調和波による定常応力状態を示す。定常波の位置は、図-7の右上の図に対応する。これより、単一波による応力集中は第1波によるものは、調和波によるものより若干大きく、第2波によるものは、若干小さいことが分る。なお、解析結果の詳細は当日発表する。

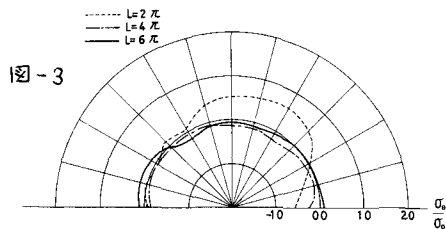


図-4

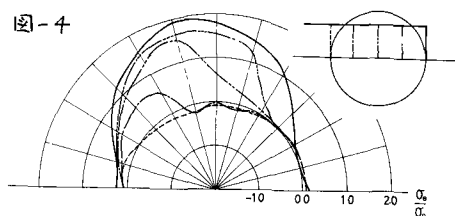


図-5

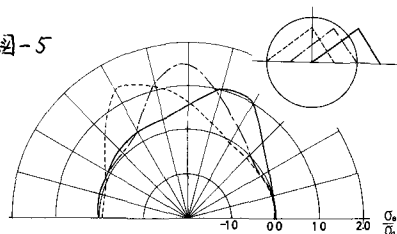


図-6

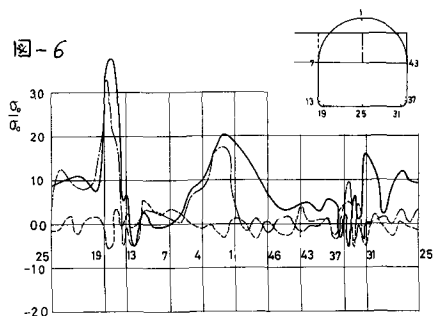


図-7

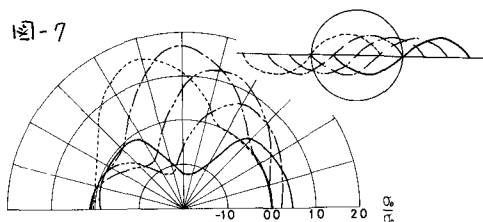
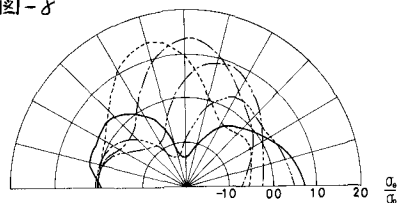


図-8



参考文献

- 1) 丹羽義次・小林昭一 横田和男, 土木学会論文報告集, 195号, pp. 27~35, 1971.
- 2) Pao, Y. H. and C. C. Mow; Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane Russak, 1973.
- 3) Pao, Y. H.; J. Appl. Mech., 29, pp. 299~305, 1962.