

地中埋設管の動特性について

京都大学工学部 正員 後藤尚男
 京都大学防災研究所 正員 土岐恵三
 京都大学防災研究所 正員 高田至郎

1. まえがき

地中埋設管や地下埋設構造物は、近代都市機能の中核施設の一つであるが、これらの施設を数多く有する大都市一帯は震害を受ける可能性がきわめて大きく、その耐震性を論ずることは重要な研究課題といえよう。地中埋設管はその周囲をすべて地盤に取り巻かれており、地盤運動と密接に関連していることはこれまで多く指摘されているとおりである。また、埋設管は地表面下を走って大きな抵抗力をもっていることが特徴であって、従来のマッシブな土木構造物とその耐震的な考え方を異にしなければならない点であろう。本研究は、弾性波動論を用いて、地盤と埋設管の動的な相互作用を取り扱い、地震時に埋設管に発生する曲げひずみ、軸ひずみと地盤運動との関連について検討を加えたものである。

2. 埋設管の曲げ振動

埋設管軸方向に進行し、その方向と直角な水平面内で運動する埋設管から十分離れた場所での地盤の変形を $U_0 = U_0 \exp\{ik(x-ct)\}$ (c : 見掛け上の伝播速度) と表示して、これがパイプの埋設されている地点に達する時に生じる地盤と埋設管との相互作用を波動論によって解析する。図1に示すように円筒座標系 (r, θ, x) をとったとき、 x 軸方向の変位 w を無視すれば、 r, θ 軸方向の地盤の変位 u, v は次の波動方程式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1)$$

上式は変数分離することによってその解が求められ、地盤内変位は境界条件より決定される未知数 M, N を含み次式で得られる。

$$u = \left\{ M \frac{\partial H_n^{(1)}(pr)}{\partial r} - N \frac{H_n^{(1)}(qr)}{r} \right\} \cos \theta \exp\{ik(x-ct)\}, \quad v = \left\{ -M \frac{H_n^{(1)}(pr)}{r} + N \frac{\partial H_n^{(1)}(qr)}{\partial r} \right\} \sin \theta \exp\{ik(x-ct)\} \quad (2)$$

ここに、 $p^2 = (p^2 - \mu k^2)/(\lambda + 2\mu)$, $q^2 = (p^2 - \mu k^2)/\mu$, $KC = \omega$, λ, μ は地盤の弾性定数である。 $H_n^{(1)}(z)$ は n 次の第1種ハンケル関数である。式(2)より地盤内の応力が求められ、地盤より埋設管に作用する y 方向の合力 F_y は次式で得られる。

$$F_y = \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \cdot r \cdot a \, d\theta \\ = -\pi a \omega^2 \left\{ M H_n^{(1)}(pa) - N H_n^{(1)}(qa) \right\} \exp\{ik(x-ct)\} \quad (3)$$

境界条件については、埋設管の管軸方向における振動モードと地盤のモードが同じ形で与えられるものと仮定し、埋設管は地盤と一体となって振動しているもの

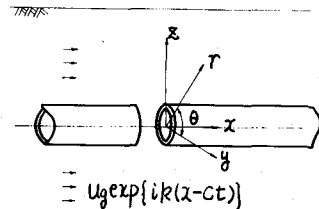


図1. 埋設管-地盤のモデル

とする。この埋設管の y 方向における相対変位を $y_p = y_d \exp\{ik(x-ct)\}$ とする。 y_d は管の運動によって決定されるべき未知数であり、地盤との相互作用を考慮して求められるべきことはいうまでもない。この境界条件は次のように表わされる。

$$[U]_{r=a} = y_d \cos\theta \exp\{ik(x-ct)\}, [V]_{r=a} = -y_d \sin\theta \exp\{ik(x-ct)\} \quad \text{----- (4)}$$

式(4)によって M, N を決定すれば、 F_y は見掛け上、埋設管の排除した地盤の質量に運動の加速度を乗じた次式で与えられる。

$$F_y = \rho \pi (a^2 K_a \omega^2 y_d \exp\{ik(x-ct)\}) \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{ここに、} K_a = \{4 - F(\rho a) - F(qa)\} / \{F(\rho a)F(qa) - F(\rho a) - F(qa)\}, F(z) = Z H_0^{(1)}(z) / H_0^{(1)}(z) \quad \text{----- (6)}$$

一方、管の曲げ振動に関する運動方程式は次式で与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 y_p}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} = P - F_y \quad \text{----- (7)}$$

ここに、 EI は埋設管の曲げ剛性、 ρ は密度、 A は断面積を表わす。また、 P は強制外力項であり、 $-\rho A \partial^2 v_s / \partial t^2$ で与えられる。 F_y は式(5)によって与えられる抵抗反力である。式(7)より相対変位を求め、さらに管の絶対変位 y_p^B 、および埋設管外縁($r=a$)における曲げひずみ ε_B を求めれば次式が得られる。

$$\frac{y_p^B}{u_g} = \left\{ 1 + \frac{EI k^4}{\rho \pi (a-b) \omega^2 - 1 + \frac{\rho}{\tau} \frac{a^2}{a-b} K_a} \right\} \exp\{ik(x-ct)\}, \quad \frac{\varepsilon_B}{\alpha} = 4\pi^2 \left(\frac{a}{\tau} \right)^2 \frac{y_p^B}{u_g} \quad \text{----- (8)}$$

3. 埋設管の軸方向振動

次に、同じく埋設管軸方向に進行し、同じ方向にその運動をもつ波動が入射する場合について、管の縦振動を取り扱って埋設管に発生する軸ひずみを求める。入射波動を $u_s^* = u_g^* \exp\{ik^*(x-C^*t)\}$ と表わし、 C^* を見掛け上の波動伝播速度とする。図1と同じ座標系を用いるとき、半径方向および、軸方向の相対変位 u, w について次の波動方程式が成立する。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (1+\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (1+\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \text{----- (9)}$$

式(9)は境界条件により決定される未知定数 A, B を含み次のようにその解が得られる。

$$u = \left\{ A \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial H_0^{(1)}(\tilde{r}r)}{\partial r} - B \frac{ik}{\tilde{g}} H_1^{(1)}(gr) \right\} \exp\{ik^*(x-C^*t)\}, \quad w = \left\{ A \frac{ik}{\tilde{r}} H_0^{(1)}(\tilde{r}r) - B \frac{1}{\tilde{g}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_1^{(1)}(gr)) \right\} \exp\{ik^*(x-C^*t)\} \quad \text{----- (10)}$$

ここに、 $\tilde{r} = \omega / v_{\tilde{r}}, g = \omega / v_g, \tilde{r}^2 = r^2 - k^{*2}, g^2 = g^2 - k^{*2}, k^* C^* = \omega$ であり、 $v_{\tilde{r}}, v_g$ は地盤内の縦波および横波の伝播速度を表わしている。このような振動系を取り扱う場合、埋設管の外径が波長に比較してあまり大きくない限り、半径方向変位は軸方向変位に比較して小さいことがわっている。そこで、半径方向変位については埋設管と地盤との接触面($r=a$)で近似的にゼロであると見なし、軸方向変位については入射波動とは相対的な変位をもち、 $r=a$ で埋設管変位と地盤変位に相対的なずれは生じないものと見なす。未定定数 y_d^* を含み埋設管変位を $y_p^* = y_d^* \exp\{ik^*(x-C^*t)\}$ とすれば、境界条件は次のように表示される。

$$r=a : [U]_{r=a} \approx 0, [W]_{r=a} = y_d^* \exp\{ik^*(x-C^*t)\} \quad \text{----- (11)}$$

式(11)を用いれば、埋設管の軸方向運動に対する抵抗力 F_x は次のように与えられる。

$$F_x = \int_0^{2\pi} \mu \frac{\partial u_x}{\partial r} a d\theta = p\pi a^2 \omega^2 f_a y_a^* \exp\{ik^*(x-c^*t)\} \quad (12)$$

$$\text{ここに, } f_a = -Z/[F(\beta a)/\{(C_0^*)^2 - 1\} + F(ga)] \quad (13)$$

式(12)はやはり、埋設管の排除した地盤の質量 $p\pi a^2$ にパイプの運動加速度 $-\omega^2 y_a^* \exp\{ik^*(x-c^*t)\}$ と式(13)で与えられる f_a を乗じた形で求められることがわかる。

一方、埋設管の縦振動の運動方程式は次式で表わされる。

$$A\Gamma \frac{\partial^2 y_p^*}{\partial t^2} - AE \frac{\partial^2 y_p^*}{\partial x^2} = P^* - F_x \quad (14)$$

強制力 P^* は $-A\Gamma \partial^2 u_s^*/\partial t^2$ で与えられる。式(12)を代入し、波動伝播方向については、地盤モードと同じ形で埋設管のモードが与えられるものとして、式(14)の強制解は求められる。これより、埋設管の軸方向絶対変位 y_p^* および軸ひずみ ε_A を求めると次のようになる。

$$\frac{y_p^*}{u_g^*} = \left\{ 1 + \frac{1}{(C_0^*)^2 - 1 - \frac{p}{\Gamma} \frac{a^2}{a^2 - b^2} f_a} \right\} \exp\{ik^*(x-c^*t)\}, \quad \frac{\varepsilon_A}{u_g^*} = 2\pi \left(\frac{a}{\kappa} \right) i \frac{y_p^*}{u_g^*} \quad (15)$$

ここに、 $C_0^* = E/\Gamma$ で与えられ、 C_0 はパイプ内を伝播する縦波速度である。

4. 解に対する考察および数値計算結果

埋設管の曲げひずみ、軸ひずみは結局式(8)、(15)によって与えられる。絶対変位については式(8)、(15)は形式上同様の形となっている。地盤の影響がない場合には式(8)、(15)の第1式の分母第3項が省かれ、これは周知のとおり棒の曲げ振動および縦振動の解を与える。したがって分母第3項が埋設管の動特性に与える地盤の影響を表わしていることになる。この地盤の影響を示す K_a 、 f_a の値は次のような考察によってその近似値が与えられる。すなわち、 $p a$ 、 $g a$ はここで対象としている埋設管のような場合には小さな値となり、この場合には式(16)より次の関係が成り立つ。

$$p a K_0(p a) / K_1(p a) \approx g a K_0(g a) / K_1(g a) \approx 3, \quad K_a \approx 2/3 \quad (16)$$

ここに、 $K_n(x)$ は n 次の変形ベッセル関数を表わしている。

いま、 $C_0/u_g = 10.0$ 、 $\nu = 0.35$ 、 $\Gamma/\Gamma = 0.75$ 、 $b/a = 0.95$ 、 $C/u_g = 1.5$ 、 $\kappa/a = 100$ として式(8)の分母第1項を計算するとほぼ0.05となる。また、式(16)を用いて K_a の近似値を求めるとほぼ100程度の値をとる。故にいても同様な関係が成立することは明らかであり、次式のように書ける。

$$\left| \frac{E i k^4}{\pi (a^2 - b^2) \omega^2} - 1 \right| \ll \left| \frac{p}{\Gamma} \frac{a^2}{a^2 - b^2} K_a \right|, \quad \left| \left(\frac{C_0^*}{C^*} \right)^2 - 1 \right| \ll \left| \frac{p}{\Gamma} \frac{a^2}{a^2 - b^2} f_a \right| \quad (17)$$

したがって、上式より式(8)、(15)で与えられる埋設管の絶対変位の地盤の動きに対する倍率は、 $\kappa/a = 100$ ぐらいでは埋設管のもつ固有振動特性である式(17)の左辺の影響を受けることはほとんどなく、式(17)右辺の地盤反力の項によって決定されることが知られる。しかもこの地盤反力はその絶対値が大きいため地盤との相対変位量はきわめて小さな値となることがわかる。すなわち、埋設管の振動特性は地盤の動きに支配されるであろうことが容易に理解される。

次に、前述の諸数値を用いて、式(8)、(15)の厳密値を計算した結果を示す。図2は入射波の波長 κ

に対する K_B , f_B の絶対値の特性を示したものである。 K_B , f_B は式(8), (15)の第1式の分母第3項の値を示す。埋設管の軸方向振動に対する地盤の抵抗値 f_B は曲げ振動に対する地盤の抵抗値 K_B よりも小さな値をとっており、一般に、実験結果などからも軸ひずみが曲げひずみよりも卓越することが指摘されているが、埋設管運動に対する地盤抵抗の差異もその要因となっていることがわかる。また、 $b/a = 0.95, 0.85$ の2種類について K_B , f_B の値を示したが、埋設管の外径が小さくなった場合には、地盤の抵抗値がいずれも大きくなっており、細い管ほど地盤の動きに追随することが知られる。図3は埋設管の曲げ変位 Y_B^P/U_B , 軸変位 Y_B^A/U_B と入射波の波長 K/a との関係を示したものである。 $K/a \leq 20$ の範囲では応答曲線はピークをもち、管の固有振動特性を示している。これは、図2の K_B , f_B が非常に短い波長の領域では値が小さくなり、周辺地盤の影響がほとんどなくなることに対応している。しかし、地震波を考える場合には $K/a \geq 100$ と見なしてよく、この範囲の波長では Y_B^P/U_B , Y_B^A/U_B とも1に近い値をとっており、埋設管変位は地盤変位と同様の挙動を行なうものと見てよさそうである。しかし、地盤内不均質部による散乱波などは短い波長をもつものがあり、変位が大きくなる場合もあるものと思われる。次に、図4は曲げひずみ $\varepsilon_B^P (= \varepsilon_B/U_B/a)$, 軸ひずみ $\varepsilon_B^A (= \varepsilon_A/U_B/a)$ と波長との関係を両対数紙上に図示したものである。 $K/a \geq 10$ の範囲においては、 ε_B^P , ε_B^A とも K/a と直線関係にある。前者はそのこう配が-2であり、後者は-1となっている。このことは曲げひずみは入射波の波長の2乗の逆数に比例し、軸ひずみは波長と1次逆比例の関係にあることを意味している。入射波の周波数についていえば、曲げひずみは周波数の2乗に、また、軸ひずみは周波数の1次にそれぞれ比例することになる。一方、この振動系に入射する波は $v_s = u_B \exp[iR(x-ct)]$ として与えられているので、結局、地盤運動との関係についていえば、埋設管に発生する曲げひずみは地盤の運動加速度に比例し、軸ひずみは地盤の運動速度に比例することが知られる。これらのことより、地盤運動の変位スペクトルのみでなく、速度、加速度スペクトルをも考慮して埋設管の耐震性を検討することが必要であると思われる。

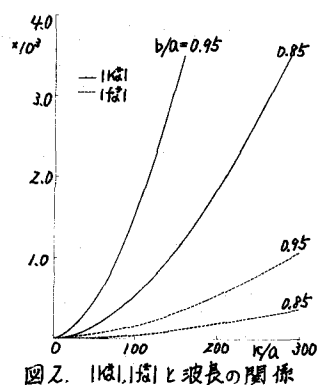


図2. $K_B/a, f_B/a$ と波長の関係

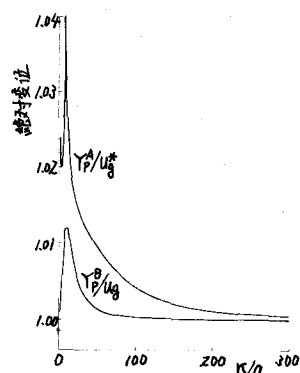


図3. 変位応答曲線

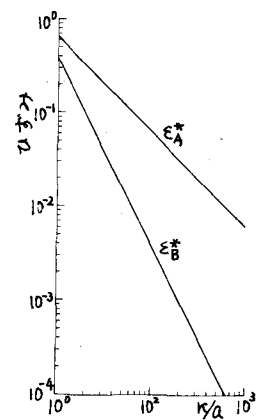


図4. ひずみと波長の関係

- 1) 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎：地中埋設管の振動性状について、土木学会，第11回地震工学研究発表会講演概要，昭.46.7. PP. 33~36.