

基礎に大きな減衰を有する橋脚の振動特性について

京都大学工学部 正員 山田 善一
 (株)大林組技術研究所 正員 ○後藤 洋三

1. まえがき

長大つり橋主塔橋脚に代表されるように、長大橋梁の主橋脚は背の高いピア—または塔の上部工と巨大な下部工からなる場合が多い。このような構造物の減衰性は、地盤の影響を受けて下部工で非常に大きい値となり、上部工はスレンダーであるため逆に小さい。動的解析を用いて耐震性の検討を進める際、この様な減衰の不均一さがもたらす影響を明らかにしておく必要があると考えられる。

我々は長大つり橋の主塔橋脚を対象とした多質点系のモデルを考え、その下部工に特に大きな粘性減衰がある場合の振動特性を複素固有値解析を用いて明らかにしてきた。本報告は複素固有値解析法と下部工の減衰が固有振動数、減衰常数、および地震応答に与える影響について述べている。

2. 減衰マトリックスの決定

多質点系の運動方程式は非線形を考慮せず、減衰として粘性減衰のみを考慮すると、

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f\} \quad \text{————— (1)}$$

式(1)において、下部工のみに大きな減衰が作用する場合には減衰係数マトリックス〔C〕は〔M〕または〔K〕等の比例形とならず、下部工に相当する要素に特に大きな値を持つた任意の形ちとなる。この様な〔C〕を用いると従来のモード解析法では一般に〔C〕によるモード間の連成が残り、モード分解が不可能となる(式(1)を互いに独立した座標系に変換できない)。すなわち、〔C〕は J. M. Cauchy の非連成の条件式を満足せず、式(1)のモード分解には複素固有値解析が必要である。

さて、本報告で述べる数値計算では次式で示す減衰係数マトリックスを用いている。

$$[C] = [M]^{\frac{1}{2}} \left\{ [\tilde{M}]^{-\frac{1}{2}} [\tilde{K}] [\tilde{M}]^{-\frac{1}{2}} \right\} [M]^{\frac{1}{2}} \quad \text{————— (2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } [\tilde{M}] &= 2\beta_t \omega_1 [M] + 2(\beta_b - \beta_t) \omega_1 \begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}] &= \frac{2\beta_t}{\omega_1} [K] + \frac{2(\beta_b - \beta_t)}{\omega_1} \begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \text{————— (3)}$$

ω_1 : 1 次の自由振動数
 β_t, β_b : 上部、下部の減衰率
 $\begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix}$: 下部の慣性項以外は 0 のマトリックス
 $\begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix}$: 下部のバネ項以外は 0 のマトリックス

式(3)において $\beta_t = \beta_b$ とすれば式(2)は Cauchy の条件式を満足し、各モードの減衰常数は振動数に関係なく一定で β_t に一致する。下部の大きな減衰は β_b を大きな値にすることにより表現する。

3. 複素固有値解析

複素固有値解析にはその実数部と虚数部に対応して式(1)の倍の自由度をもつ方程式が必要である。

すなわち

$$[A]\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + [B]\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad \text{————— (4)}$$

ただし式(4)において $[A] = \begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}$, $[B] = \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix}$ である。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} e^{pt} \quad \text{として Homogeneous Equation を求めると}$$

$$p[A] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$[A]^{-1}$ をかけ, $[D] = [A]^{-1}[B]$ とすれば特性方程式は次のように書ける。

$$|pI + D| = 0 \quad (6)$$

式(6)の根 p が複素固有値である。式(1)が N 元のマトリックスから構成されている場合には、式(6)は $2N$ 個の固有値を与えることになる。通常の減衰振動問題ではこの固有値群は N 組の共役複素数となる。対応する複素固有ベクトルは式(6)の結果を代入することにより式(5)から求められる。

ℓ 番目の共役複素固有値と共役複素固有ベクトルを

$$\left. \begin{aligned} p^{(\ell)} &= -\beta^{(\ell)}\omega^{(\ell)} + i\omega^{(\ell)}, & \bar{p}^{(\ell)} &= -\beta^{(\ell)}\omega^{(\ell)} - i\omega^{(\ell)} \\ \begin{Bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{Bmatrix}^{(\ell)} &= \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)} + i \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)}, & \begin{Bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{Bmatrix}^{(\ell)} &= \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)} - i \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)} \end{aligned} \right\} \quad \text{— とすると実変位は}$$

$$\begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{\ell} \left[\begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)} \pm i \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}^{(\ell)} \right] e^{(-\beta^{(\ell)}\omega^{(\ell)} \pm i\omega^{(\ell)})t} \quad (7)$$

従つて j 節点の実変位 y_j は

$$y_j = \sum_{\ell} e^{-\beta^{(\ell)}\omega^{(\ell)}t} X_j^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)}t + \theta_j^{(\ell)}) \quad (8)$$

$$\text{ただし } X_j^{(\ell)} = \sqrt{\psi_j^{(\ell)2} + \varphi_j^{(\ell)2}}, \quad \theta_j^{(\ell)} = \tan^{-1} \frac{\varphi_j^{(\ell)}}{\psi_j^{(\ell)}}$$

以上の説明と式(8)から明らかなように、複素固有値の実数部は減衰性を与え虚数部は振動数を与える。また複素モードはひとつのモード内の振巾変化に位相差 $\theta_j^{(\ell)}$ が存在することが特徴である。

強制振動の解析は式(4)を複素モードを用いた変換によつて対角化することにより、各モード別に独立した複素応答として解析することができる。

4. 数値解析の結果

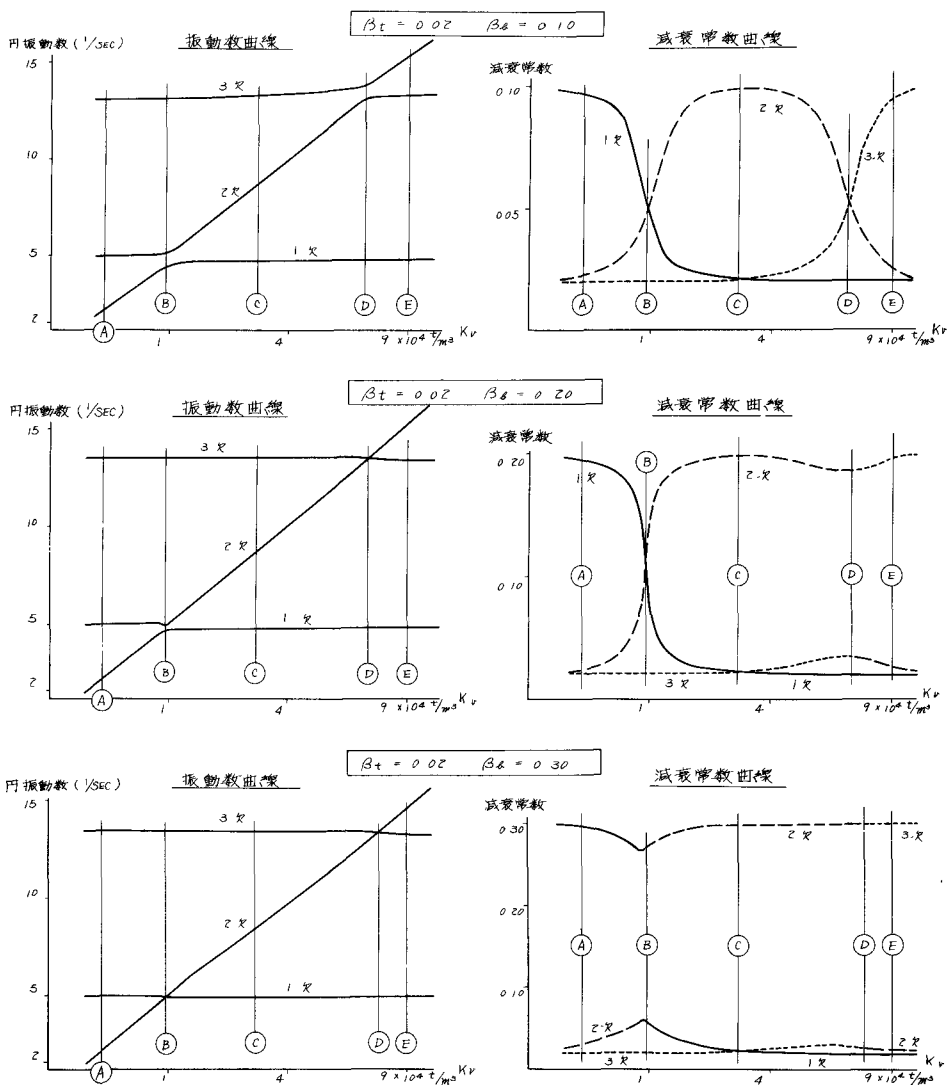
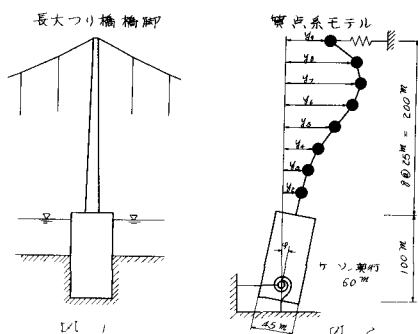
数値解析の対象とした長大つり橋主塔橋脚の略図を図-1に示す。図-2はその質点系モデルである。図-3には上部工の減衰を2%とし下部工の減衰を10%, 20%, 30%とした3つのケースについて、地盤反力係数を広い範囲に変化させ対応する各モードの固有振動数と減衰常数を求めたものを行っている。図-4には図-3の各ケースについてそれぞれ代表的な5個の地盤反力係数値における地震応答を計算した結果を示した。各結果は、E ℓ Centro40-NS & EW, TAFT-NS & EW, OLI-MPIA の5記録の最大加速度を100 galで統一して計算し、得られた各最大応答を平均したものである。同図中実線は複素応答計算の結果である。破線は従来のモード解析法によつてモーダルマトリックス $[V]$ を求め、減衰項 $[V]^T[C][V]$ の非対角要素、すなわち $[C]$ によるモード間連成の要素を無

視した近似を行い、通常の応答計算にあてはめて得られた結果である。結果の詳細については講演当日述べることにする。

参 考 文 献

T.K.Caughey; "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems" J.A.M., Jun. 1960

K.A.Foss; "Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems" J.A.M., Sept. 1958



応答計算結果 入力地震波 5波(最大100gal)平均 ——— 複素応答 ----- 近似応答

