

周期荷重を受ける弾性地盤上の板の応力解析

九州大学工学部 正員 横田 漢

1. まえがき 周期荷重を受ける弾性地盤上の板の問題について、著者は先に、板の波動伝播機構の解明を行、⁽¹⁾解析板荷重から十分に離れた点におけるものであり、荷重の近傍については別の手法が必要となるものであ、⁽²⁾。本論文は、その荷重の近傍における板の挙動の解明を目的として、まず板に均等分布荷重が作用する場合について前論と同様、地盤を半無限弾性体と仮定して解析を行い、算例として荷重中心点における板の変位および曲げモーメントを求めたものである。

2. 解法 図-1に示すように、板の中立面を $z=0$ とする円筒座標 (r, θ, z) を設け、それぞれ x, y, z の方向の変位を (u, v, w) とすると、地盤の波動方程式の解は図1のように次式で与えられる。

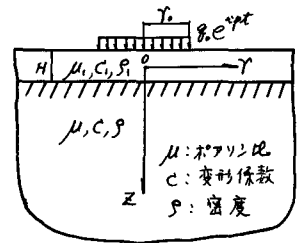


図-1

$$\begin{aligned} w &= \left[A_0 \frac{\alpha}{k^2} e^{-\alpha z_2} - C_0 \frac{\beta^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] H_0^{(2)}(kr) e^{i\varphi t} \\ \sigma_z &= G \left[A_0 \frac{-2\beta^2 + j^2}{k^2} e^{-\alpha z_2} + 2C_0 \frac{\beta \beta^2 + j^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] H_0^{(2)}(kr) e^{i\varphi t} \\ \tau_{rz} &= G \left[A_0 \frac{2\alpha}{k^2} e^{-\alpha z_2} - C_0 \frac{\beta^3 + \beta^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] \frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r} e^{i\varphi t} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \beta^2 + j^2$, $k = p/\pi$, $j' = p/\pi$, $z_2 = z - H/2$
 他方、板の応力を $w = W e^{i\varphi t}$ とすれば、板の振動微分方程式より次式がえられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W - \lambda^2 W = \frac{1}{D} \{ q(r) - R(r) \} \quad (2)$$

$$q(r) = \begin{cases} q_0 & (0 \leq r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} = \frac{P}{\pi r_0} \int_0^\infty J_1(kr_0) J_0(kr) dk, \quad P = \pi r_0^2 q_0$$

$\lambda^2 = \rho H p^2 / D$, $R(r)$: 地盤反力, D : 板剛度

次に、板と地盤との接触面 ($z = H/2$) において次の連続条件式を考える。

$$[w]_{z=0} = W, \quad [\sigma_z]_{z=0} + R(r) e^{i\varphi t} = 0, \quad [\tau_{rz}]_{z=0} = 0 \quad (3)$$

式(1), (2)および式(3)より、積分定数 A_0 , C_0 を決定し、板の応力および曲げモーメントを求めれば結局、次式の内容となる。

$$\begin{aligned} W &= \frac{P H^2}{\pi D R_0} \int_0^\infty \frac{\gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) J_1(\gamma a) d\gamma \cdot e^{i\varphi t} \\ M_r &= \frac{P}{\pi R_0} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 \gamma \gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) \left\{ \gamma J_0(\gamma a) + (\mu - 1) \frac{J_1(\gamma a)}{a} \right\} d\gamma \cdot e^{i\varphi t} \\ M_\theta &= \frac{P}{\pi R_0} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 \gamma \gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) \left\{ \mu \gamma J_0(\gamma a) + (1 - \mu) \frac{J_1(\gamma a)}{a} \right\} d\gamma \cdot e^{i\varphi t} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K(\gamma) &= \gamma \varepsilon^3 \gamma^4 - 6 \frac{1-\mu}{\gamma} \bar{\gamma} \varepsilon \gamma - 6 \frac{1-\mu}{\gamma} R(\gamma), \quad R(\gamma) = (2\gamma^2 - 1)^2 - 4\gamma \gamma' \gamma^2 \\ \gamma^2 &= \gamma^2 - \gamma'^2, \quad \gamma'^2 = \gamma^2 - 1, \quad \gamma = k/j, \quad a_0 = r_0 j, \quad a = r j, \quad R_0 = r_0 / H \\ \varepsilon &= a_0 / R_0 = j H, \quad \bar{\gamma} = G_1 / G, \quad \bar{\gamma}' = \gamma_1 / \gamma, \quad \gamma = k / j \end{aligned}$$

3. 算例 $\mu_1 = 1/6$, $\mu = 1/4$ ($q = \lambda$), $S_1 = 2.39/cm^2$, $S = 1.89/cm^2$ および $\epsilon = 1$ とし, $K = c/c_0$ および a_0 の種々の値に対し, 荷重中心奥における $2W$ および $M_H = M_0$ を求めれば次の通りである。

表-1

K	a_0	S_1
10	0.1	1.112469380
	0.2	1.135922559
	0.3	1.149717091
	0.4	1.147446430
	0.5	1.129985090
	0.6	1.103311335
	0.7	1.073498997
	0.8	1.044875812
	0.9	1.020567807
	1.0	1.003919300
50	0.1	1.109700266
	0.2	1.112425953
	0.3	1.084586673
	0.4	1.043103514
	0.5	1.009020534
100	0.1	1.106372467
	0.2	1.099015159
	0.3	1.043021025
	0.4	1.004314698
250	0.1	1.097179867
	0.2	1.047829133
	0.3	1.000831877
500	0.1	1.084013742
	0.2	1.013885728
1000	0.1	1.063419303

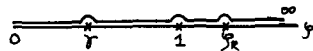


図-2

の形に表わし, f_1 , f_2 および g_1 , g_2 の値を図-3 K 示す。

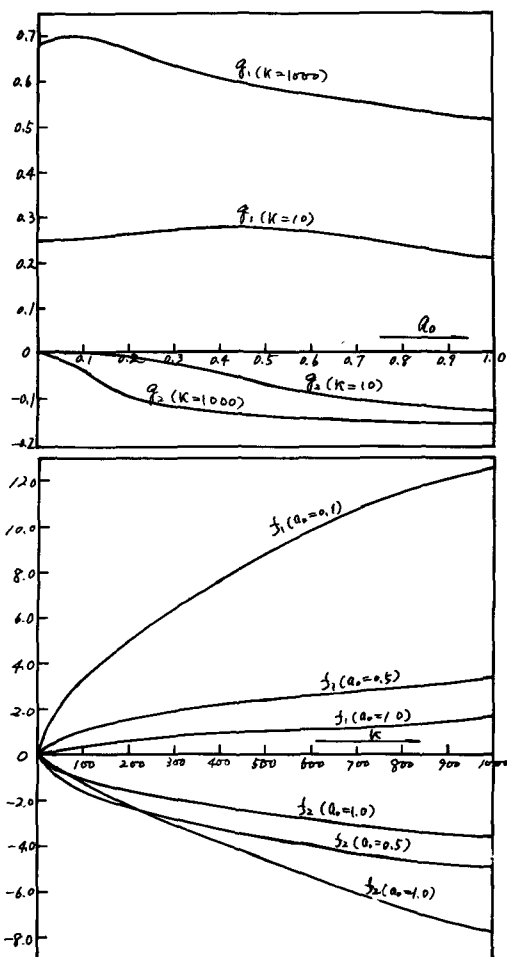
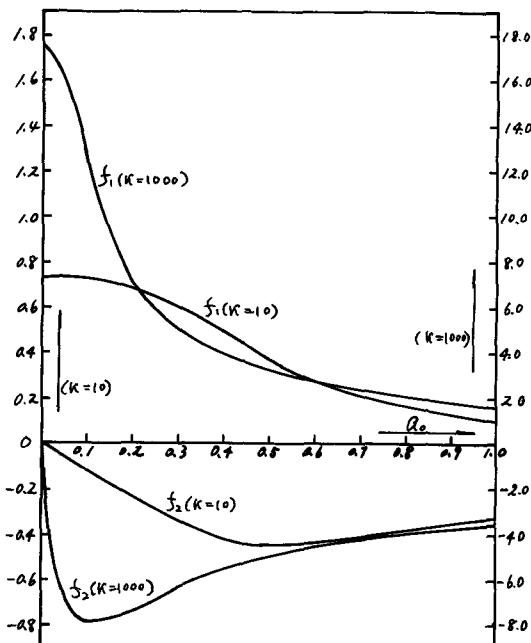


図-3



1) 山崎・横田, 『周知荷重を受ける弾性地上の板の波動解析』, 工学会第25回年次学術講演集, 昭和45年11月
2) 主値の数値計算方法について, 田大教授・田治見先生の御助言と頂く。記して謝意を表します。