

非線形多孔質弾性層の振動性状に関する研究

京都大学工学部 後藤尚男
京都大学防災研究所 土岐憲三
京都大学大学院 ○佐藤忠信

地震時の地盤の動的挙動を調べる場合、地盤を均質等方な線形弾性体とみなしてその振動性状を解析することが多い。しかし土木構造物の安全性に関係するような地表層では層を構成する物質はかなり軟かく、かつ固体、流体の二相から構成されることが多いから、このような物質を単一相からなる線形弾性体と考えることはかなり大胆な仮定と言える。一方、地盤の非線形応答を求めるために、地盤をばねと集中質量からなる多質点系モデルにおき換え、ばねに履歴特性をもたせて地盤の非線形振動特性を研究しようとする考え方があるが、3次元応答カーブが必ずしも関係を考慮してばね定数を決定するのにかなりの工夫が必要と考えられる。また地盤を構成する物質を弾塑性体と考えると、振動時の速度場を満たす解を有限要素法を用いて求めた研究も行なわれている。しかし、いずれの場合にもせん断ひずみと体積ひずみの coupling の現象を明確にとらえるに至っていないから、土のような物質に特有なダイラタンシー現象を適確に取り入れていけるとは言いがたい。ここでは、土を水で飽和された等方性の非線形多孔質弾性体と考え、ダイラタンシー現象に着目して地表層の振動性状を考察する。

1. 運動方程式と構成式

3次元空間内での多相混合体のラグランジェ密度 L (混合体単位体積当り) は基準座標としてカルテシアン座標を用いればつぎのように表わされると考えられる。

$$L = L(\eta_{I,J}^{(\alpha)}, \dot{\eta}_I^{(\alpha)}, \eta_I^{(\alpha)}, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

ここに、 $\eta_I^{(\alpha)}$: 構成要素 $\Delta^{(\alpha)}$ の基準座標系での一般化座標、 t : 時間、 $\bullet$ 記号 : $\partial/\partial t$, J : $\partial/\partial X_J$, X_J : 基準座標系を表わす。したがって系全体のラグランジェアン Ω は $\Omega = \int_V L dV$ と表わされる。これに、ハミルトンの変分原理を適用することにより、多相混合体のラグランジェの運動方程式として次式を得る。ただし飽和規約を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_I^{(\alpha)}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{I,J}^{(\alpha)}} \right)_J - \frac{\partial L}{\partial \eta_I^{(\alpha)}} = 0 \quad (2)$$

ここで取り扱うのは弾性体と流体の混合した2相系についてのみ考えるから、一般化座標として

$$\eta_I^{(1)} = U_I(X_J, t) : \text{弾性相の変位}, \quad \eta_I^{(2)} = V_I(X_J, t) : \text{流体相の変位} \quad (3)$$

を取れば、式(2)はつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial V_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_I} = 0 \quad (4)$$

いま多孔質物体中を流れる流体がBisualiの法則に従うと仮定すると、流体相と弾性相の相対速度の2次形式で dissipation 関数 Ξ がつぎのように定義される。³⁾

$$2\Xi = b(\dot{U}_K - \dot{V}_K)(\dot{U}_K - \dot{V}_K) \quad (5)$$

b はひずみ不変量 (I_E, II_E, III_E : 弾性相, I_f, II_f, III_f : 流体相のひずみ不変量) によって、物体がひずみを受けている状態のまわりのテーラー展開でき、次式のようになる。

$$b = b_0 + b_1 I_E + b_2 I_f + \dots \quad (6)$$

ニニに, $b_0, b_1, b_2, \dots$ は実験的に定まる定数であるが, b_0 はこれまでになされてゐる研究結果より次式で表わしてもよいと考えられる。 $b_0 = \rho_0^f \beta_0 g / k_0$ (7)

ニニに, ρ_0^f, β_0, k_0 はそれぞれ必ずみを受けていないときの流体相の密度, 間げ定率, 透水性を表わし, g は重力加速度である。dissipation 関数を考慮したときの式 (4) は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I} + \frac{\partial \Xi}{\partial U_I} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_I} + \frac{\partial \Xi}{\partial V_I} = 0 \quad (8)$$

なお, ラグランジエ密度 L は系全体の運動エネルギー T , 必ずみエネルギー W , 各相の物体カポテンシャル $\phi^{(k)}$ を用いて次式のように表わされる。 $L = T - W - \rho_0^f \phi^{(1)} - \rho_0^E \phi^{(2)}$ (9)

ニニに, ρ_0^E は弾性相の密度を表わしてゐる。なお基準座標系での運動エネルギーはつぎのようになる。

$$2T = \rho_{11} \dot{U}_K \dot{U}_K + 2\rho_{12} \dot{U}_K \dot{V}_K + \rho_{22} \dot{V}_K \dot{V}_K \quad (10)$$

$\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ は孔けきを流れる流体の相対速度が一様でないことを考慮に入れた基準座標系での質量係数である。系全体の必ずみエネルギー W は混合体を構成する物質のマクロな性状が等方性を示せば, 各相の必ずみ不変量を用いて次式のように表わされる。

$$W = W(I_E, II_E, III_E, IV_f) = W(U_{I,J}, V_{I,J}) \quad (11)$$

ニニに, IV_f は流体相の体積必ずみを表わす変数で, I_f, II_f, III_f との間に次式が成立する。

$$IV_f = (1 + 2I_f + 4II_f + 8III_f)^{1/2} - 1 \quad (12)$$

式 (11) の W を, 物体が必ずみを受けていない状態のまわりでテーラー展開すれば次式をうる。

$$W = \alpha I_E + \beta IV_f + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_E^2 - 2\mu II_E + R IV_f I_E + \frac{1}{2} Q IV_f^2 + \ell I_E^3 + m I_E II_E + n III_E + L IV_f^3 + f_1 IV_f II_E + f_2 IV_f I_E^2 + f_3 IV_f^2 I_E + (\text{higher order term}) \quad (13)$$

ニニに, α, β は必ずみがゼロの時の弾性相の応力と流体圧, λ, μ, ℓ, m, n は弾性相の弾性係数, Q は流体相の弾性係数, R, f_1, f_2, f_3 は流体相と弾性相の変形の coupling を表わす定数である。なお, 流体相ならびに弾性相の必ずみ E_{IJ}^f, E_{IJ}^E は式 (3) で定義した変位を用いて次式のようになる。

$$E_{IJ}^f = \frac{1}{2} (U_{I,J} + U_{J,I} + U_{K,I} U_{K,J}), \quad E_{IJ}^E = (V_{I,J} + \frac{1}{2} V_{I,J}^2) \delta_{IJ} \quad (\text{no sum for } I, J) \quad (14)$$

式 (9), (10), (11) を式 (8) に代入すれば 2 相混合系の運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial U_I}{\partial t} - \frac{\partial V_I}{\partial t} \right) + \rho_0^E \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial U_I} &= \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}} \right)_{,J} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial U_I}{\partial t} - \frac{\partial V_I}{\partial t} \right) + \rho_0^f \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial V_I} &= \left(\frac{\partial W}{\partial V_{I,J}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式 (15) の第 1 式は弾性相に対する運動方程式であり, 第 2 式は流体相に対するものである。いずれも有限変形理論に基づいて誘導されてゐる。また基準座標系に対して求められたものであるから, 境界条件は時間によって変動するとはない。なお式 (15) の右辺の値は Piola-Kirchhoff の応力成分となる。

つぎに, 式 (13) から弾性相に発生する応力 K_{IJ} と流体相に発生する圧力 P_f を求めると次式となる。

$$K_{IJ} = \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}^E} = [\alpha + \lambda I_E + (3\ell + m) I_E^2 + (m + n) II_E + R IV_f + f_1 IV_f I_E + 2f_2 IV_f II_E + f_3 IV_f^2 I_E] \delta_{K,L} + [2\mu - (m + n) I - f_1 IV_f] E_{IJ}^f + n E_{IK} E_{KJ} + (\text{higher order term}) \quad (16)$$

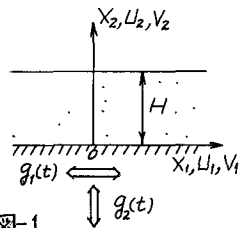
$$P_f = \frac{\partial W}{\partial IV_f} = \beta + Q IV_f + L IV_f^2 + R I_E + f_1 II_E + f_2 I_E^2 + 2 IV_f I_E \quad (17)$$

ニニに, K_{IJ}, P_f はいずれも Kirchhoff の応力成分になつてゐる。式 (17) は流体圧が弾性相の 2 次の

ひずみ不変量 Π_E に関係している。 Π_E は弾性相の 8 面体せん断ひずみ γ_{oct} と $\Pi_E = I_E^2/3 - 3\gamma_{oct}^2/2$ なる関係があるから、間接き流体圧が弾性相のせん断ひずみに関係すると言う、いわゆるダイラタンシー現象を式(17)で表示できることがわかる。これから、ひずみエネルギーに非線形性を導入すればダイラタンシー現象を動的問題へ組み入れることが可能になる。以下では、ひずみの非線形性を導入することによって起る現象を調べることを主眼とし、式(13)の展開次数は 3 次までとした。^{*})

2. 水平層の振動解析

図-1 のような半無限に抗がる基盤上の厚さ H の弾性層を考える。層に入射する波が境界 $X_2=0$ に鉛直下方から一様に入る波であるとするれば、これによって表層内に発生する応答変位は X_2, z のみの関数と考えてよい。この場合式(15)は 4 元連立 2 階偏微分方程式になるが、 U_1 と V_1 の関係は時間微分のみに関するもの、 $\rho_{11}\partial^2 U_1/\partial t^2 + \rho_{22}\partial^2 V_1/\partial t^2 - b(\partial U_1/\partial t - \partial V_1/\partial t) + \rho_0^f G_1 = 0$ と $\rho_{11}\partial^2 U_1/\partial t^2 + \rho_{22}\partial^2 V_1/\partial t^2 - b(\partial U_1/\partial t - \partial V_1/\partial t) + \rho_0^f G_1 = 0$ となり U_1 が決まれば、 V_1 も一義的に決定される。これから方程式系は 3 元連立 2 階偏微分方程式へ変換できる。したがって、境界条件としては、右境界で U_1, U_2, V_2 の 3 つの値に関するものが与えられれば十分である。なお境界条件は線形となり 1 次式のようになる。



$$X_2=0: U_1=g_1(t), U_2=V_2=g_2(t), \quad X_2=H: U_1,z=0, U_2,z=0, V_2,z=0 \quad (18)$$

また、初期条件としては、 $t=0$ で変位と速度をゼロに取った。

式(13)を式(15)に代入した方程式は非線形偏微分方程式であるから、解析的に解を求めることはかなり困難である。以下では階差法によってその数値解を求め考察を加えることにする。

2-(a) 流体相のない場合 : 流体相がない場合には $V_1=V_2=0$ となり運動方程式は 2 元連立 2 階偏微分方程式となる。計算に用いた定数は、 $H=10m$, $\rho_0^s=2.1(g/cm^3)$, $\lambda=800(kg/cm^2)$, $\mu=200(kg/cm^2)$ で、地表層に入射する波は正弦波とし、その加速度振幅を 200 gal, 周波数を 3 Hz とした。図-2 は鉛直下方から正弦的な SH 波が入った場合の地表面での水平変位と鉛直変位の応答を示したものである。非線形弾性係数 l, m, n はゼロに取ってあるが、方程式系が有限変形理論に基づいているため、水平変位だけでなく鉛直変位の発生することがわかる。これは、グリーンのひずみテンソルの 2 次の項に体積変化と形状変化の coupling があるために発生する現象である。また鉛直変位の周期は水平変位のそれのおよそ半分になっている。図-3 は $l=m=n$ の条件下で非線形弾性係数を変化させた場合の鉛直変位振幅の変動を調べたものである。破線は l, m, n が正の値で変化する場合であり、実線は負の値で変

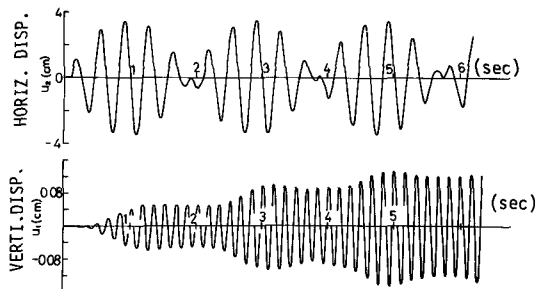


Fig.2 Response of horizontal and vertical displacement at ground surface.

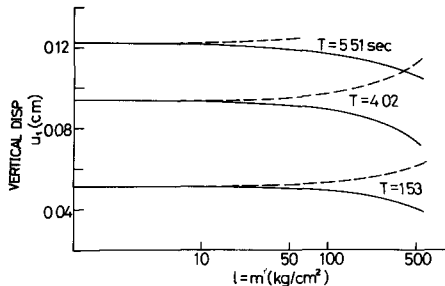


Fig.3 Vertical displacement at ground surface versus non-linear elastic constant.

^{*}) 4 次以上の展開を行なうと、方程式系は温度の伝播も考慮したものとしなければならぬ。⁴⁾

化する場合のものである。 l, m, n の値が入, μ の値のオーダーに近くなると、その変動は急激に大きくなるこがわかる。

2-(b) 流体相がある場合：計算に用いた定数は、 H, λ, μ は2-(a)のものと同じとし、 S_{11} は弾性相の S_{22} は流体相の単位質量とし、 $S_{12}=0$ と考えた。 Q は15°Cの水の体積弾性率 2.136×10^6 (kg/cm²)とし、他の弾性係数($l, m, n, R, f_1, f_2, f_3$)はすべて同一の値を取るものと考えて計算を行なった。今後これを未知係数と呼ぶことにする。入力は正弦波とし、加速度振幅は水平方向200 gal, 鉛直方向100 galとした。なお入力周波数は水平方向2.5 Hz, 鉛直方向6.5 Hzとした。ダミー形減衰を表わす係数 b は式(17)で与えられる b 。その近似値とし、間げき率0.4, 透水係数 $k_v=0.05$ (cm/sec)とした。

図-4は弾性相と流体相の地表面で

の鉛直変位と水平変位を水平入力のみの場合について示したものである。ただし未知係数は100(kg/cm²)

に取った。(a)は弾性相の水平変位、(b)は流体相の水平変位を表わしている。透水係数が0.05(cm/sec)

と言うのがかなり粒径の大きな砂の場合に相当するが、このような

場合でも弾性相と流体相の水平変位の間には相対的な変位が起るた

いことを示している。(d)は流体相の鉛直変位を示している。流体

相の変形は負の側だけに起り、水

平変位の同期の2倍のものが卓越している。図-5は

図-4と同じ条件で、未知係数を0, 1, 100(kg/cm²)と

変えた場合の地表層面での間げき水圧応答を示したものである。図-6は未知係数が100(kg/cm²)のとき

の深さ方向の間げき水圧分布の形状を示したものである。これから無限に広がる表層地盤内に発生する

間げき水圧は地表面でゼロとなり層面内で最大値をとるこがわかる。図-7は水平入力と鉛直入力と同時に

入る場合の地盤底面での間げき水圧応答を示したものである。(a)は水平入力のみ場合、(b)は

水平鉛直両方向の入力のある場合である。これから鉛直入力の地表層内に発生する間げき水圧におよぼ

す影響は非常に大きいこがわかる。

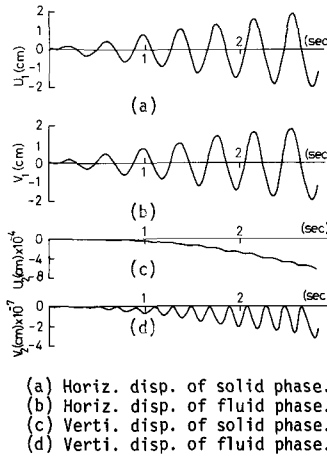


Fig.4 Response of displacement at ground surface.

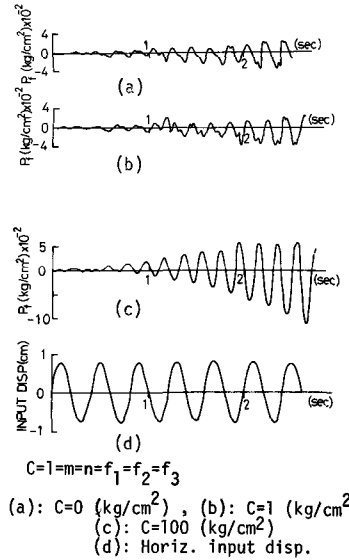


Fig.5 Response of pore pressure at the boundary of base.

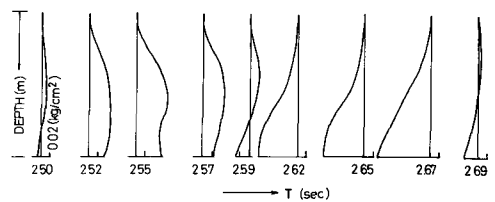


Fig.6 Time history of distribution of pore pressure.

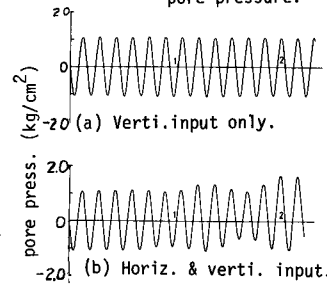


Fig.7 Response of pore pressure at the boundary of base.

1) Idriss, I. M. & H. B. Seed, ASCE SM4, pp1003~1031 (1968), 2) 小澤謙二, (ib), Proc. 3rd J.E.E.S, pp501~508, 1970
3) M. A. Biot, J. App. phys., vol. 27, no. 5 pp459~467, 1956, 4) D. R. Bland, "Nonlinear Dynamic Elasticity" 1969, Blaisdell Pub. Co.