

等価履歴減衰定数に関する1,2の考察

京都大学 工学部 後藤尚男
京都大学 大学院 家村浩和

1. まえがき

変位-復元力の間の履歴特性に基づく減衰エネルギーを等価な粘性減衰定数に置換しようとする手法は Jacobson はじめ数多くの研究者によって試みられて来た。これらの研究の大部分はいわゆる等価履歴減衰定数を調和波入力による履歴系の定常応答振幅の関数として解析したものであるが、履歴特性に内在する非線形性に起因する固有振動数の変化の評価の仕方により、その定義方法ならびに値はまちまちである。本研究ではこれまで単独で論じられることの多かった等価減衰定数を、振動系全体の線形化すなわち等価線形化法という立場から固有振動数の変化とあわせて解析し考察を加えた。ここで対象とした解析は定常応答の範囲内のみであるが、入力波形としては調和波のみならず不規則波をも考慮し、調和波入力による結果を拡張するとともに T.K. Caughey による等価線形化法を適用した値をも求めて比較・検討した。

2. 運動方程式と履歴復元力特性の模式表示

本研究ではすべて無次元表示された式(1)の1自由度系を対象に解析を進める。

$$\frac{d^2\mu}{d\tau^2} + 2h_0 \frac{d\mu}{d\tau} + q(\alpha, \beta, \mu, \tau) = \begin{cases} -f_s \cos \eta \tau \\ -f_s N(\eta \tau) \end{cases} \quad (1)$$

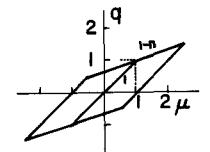


Fig. 1 Nondimensional representation of the bi-linear hysteresis

ここに h_0 は減衰定数, f_s は外力強度を示す無次元定数, $N(\eta \tau)$ は分散値1なる定常 Gauss 過程, η は無次元振動数, τ は無次元時間, $q(\alpha, \beta, \mu, \tau)$ は無次元変位 μ と無次元復元力 q の関係を与える履歴特性で、Fig. 1 の Bi-linear 系および Fig. 2 の修正 Jennings 系を採用した。Fig. 1 の N は弾塑性傾斜率を示し、Fig. 2 の各曲線の方程式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \text{skeleton ; } \mu &= \frac{1}{1+\alpha} \{ q + \alpha q^r \} \\ \text{branch ; } \frac{\mu - \mu_0}{2} &= \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{q - q_0}{2} + \alpha \left(\frac{q - q_0}{2} \right)^r \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

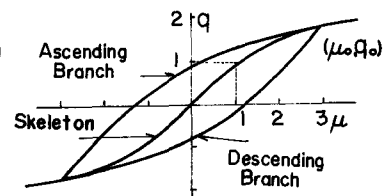


Fig. 2 Modified Jennings' hysteresis

3. 調和波入力の場合の等価減衰定数

(1) 手法(1)

式(1)で表示される履歴振動系を次式で示される外力により固有振動数が変化しない等価線形振動系に置換する場合について考える。

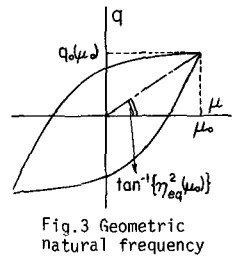
$$\frac{d^2\mu}{d\tau^2} + 2h_{eq}(\mu_0) \frac{d\mu}{d\tau} + \mu = -f_s \cos \eta \tau \quad (3)$$

式(1)および上式の1サイクルにおける消費エネルギーのつり合い条件は次式のように表わせる。

$$\oint \left\{ 2h_0 \frac{d\mu}{d\tau} + q(\alpha, \beta, \mu, \tau) \right\} d\mu = \oint 2h_{eq}(\mu_0) \frac{d\mu}{d\tau} d\mu \quad (4)$$

式(1)において応答変位 $\mu(\tau)$ が単一調和波振動をするものと仮定し、定常応答振幅 μ_0 が式(1)および式(3)の両振動系で等しくなるように等価減衰定数を定めると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi-linear系;} h_{eq}(\mu_0) &= h_0 + \frac{2n(\mu_0-1)}{\pi\mu_0} \\ \text{修正Jennings系;} h_{eq}(\mu_0) &= h_0 + \frac{2\alpha(1+\alpha)(r-1)g_0^{r-1}}{\pi(r+1)(1+\alpha g_0^{r-1})^2} \end{aligned} \right\} \text{-----(5)}$$



(2) 手法(2)
式(1)で示される履歴振動系の非線形性を考慮して固有振動数 η_{eq} が定常応答振幅 μ_0 の関数となる場合の等価線形振動系について考えてみる。

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h_{eq}(\mu_0)\eta_{eq}(\mu_0)\frac{du}{dt} + \eta_{eq}^2(\mu_0)u = -f_s \cos \eta\tau \text{-----(6)}$$

いま簡便法として $\eta_{eq}^2(\mu_0)$ が Fig. 3 に示すように $g_0(\mu_0)/\mu_0$ なる幾何剛性でもって示されるものとし、さらに式(4)のエネルギーのつり合い式を用いると $h_{eq}(\mu_0)$ は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi-linear系;} h_{eq}(\mu_0) &= \left\{ h_0 + \frac{2n(\mu_0-1)}{\pi\mu_0} \right\} \mu_0 / \{1 + (1-n)(\mu_0-1)\} \\ \text{修正Jennings系;} h_{eq}(\mu_0) &= \left\{ h_0 + \frac{2\alpha(1+\alpha)(r-1)g_0^{r-1}}{\pi(r+1)(1+\alpha g_0^{r-1})^2} \right\} \{1 + \alpha g_0^r\} / (1+\alpha) \end{aligned} \right\} \text{-----(7)}$$

(3) 手法(3)

手法(2)においては固有振動数 $\eta_{eq}^2(\mu_0)$ を直感的な幾何剛性でもって求めたが、ここでは *slowly varying parameter method* による近似的解析手法で求めてみる。いま式(1)の応答変位 $u(\tau)$ が次式で示されるとし、 $u(\tau) = \mu_0(\tau) \cos\{\eta\tau + \phi(\tau)\}$ ----- (8)

さらに履歴復元力特性 $g(\alpha, \beta, \mu, \tau)$ のフーリエ係数 $S(\mu_0), C(\mu_0)$ を次式のように定義する。

$$S(\mu_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\alpha, \beta, \mu_0 \cos \theta, \tau) \sin \theta d\theta, \quad C(\mu_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\alpha, \beta, \mu_0 \cos \theta, \tau) \cos \theta d\theta \text{-----(9)}$$

しる後式(8)を式(1)に代入し、平均化解法を用いると $\eta_{eq}(\mu)$ は次式の関係式を満足する。

$$\{S(\mu_0) - 2h_0\eta_{eq}(\mu_0)\mu_0\}^2 + \{C(\mu_0) - \eta_{eq}^2(\mu_0)\mu_0\}^2 = f_s^2 \text{-----(10)}$$

上式を解けば履歴系の共振曲線が得られるが、その共振条件より $\eta_{eq}^2(\mu_0)$ を求めて式(6)に適用すると、 $h_0 = 0.0$ なる場合の $h_{eq}(\mu_0)$ は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi-linear系;} h_{eq}(\mu_0) &= \frac{2n(\mu_0-1)}{\mu_0} / \left\{ \eta_0^{*2} + (1-n)\pi - \frac{1}{2}\sin 2\theta^* \right\} \\ \text{修正Jennings系;} h_{eq}(\mu_0) &= \frac{\alpha(1+\alpha)(r-1)g_0^{r-1}\mu_0^2}{(r+1)(1+\alpha g_0^{r-1})^2} / \left\{ \int_{-\mu_0}^{\mu_0} \frac{x g(\alpha, \beta, x, \tau)}{\sqrt{\mu_0^2 - x^2}} dx \right\} \end{aligned} \right\} \text{-----(11)}$$

ただし θ^* は塑性域から次の塑性域に至るまでに要する無次元時間である。

(4) 数値計算例

Fig. 4, 5, 6 にそれぞれ $n=0.75$ なる Bi-linear 系, $n=1.00$ なる Elasto-plastic 系および $\alpha=0.1$ $r=7$ なる修正 Jennings 系の $h_{eq}(\mu_0), \eta_{eq}(\mu_0)$ を前に述べた各手法によって $h_0=0.0$ なる場合の計算結果を示した。固有振動数の変化を考えない手法(1)による $h_{eq}(\mu_0)$ は履歴系の応答振幅 μ_0 が約 2.0 付近でおおの最大となり、その値は Elasto-plastic 系の時最大 0.16 となる。soft-spring 型復元力特性に起因する固有振動数 $\eta_{eq}(\mu_0)$ の低下を考える手法(2), (3)によると、 $h_{eq}(\mu_0)$ は手

法(1)の結果より当然大なる値を与える。 $\eta_{eq}(\mu_0)$ は μ_0 が増大すると降伏後の剛度に大きく支配されBi-linear系では $\eta_{eq}(\infty) \rightarrow \sqrt{1-n}$, Elastoplastic系および修正Jennings系では $\eta_{eq}(\infty) \rightarrow 0$ となる。これら μ_0 の関数として求められた $h_{eq}(\mu_0)$, $\eta_{eq}(\mu_0)$ で構成される等価線形振動系が、履歴系と同一の入力に対して同一の応答を示す最適フィルタであるかどうかという点を明確にするためには、まず入力強度 γ および振動数 μ と μ_0 との関係が求められるべきであるが、手法(3)の式(10)による μ_0 の推定はほぼ妥当であることを、デジタル計算機内のシミュレーションとの比較によりすでに確かめた¹⁾。簡便な手法(2)による $h_{eq}(\mu_0)$ は、 $\mu_0 \leq 2.0$ なる範囲で解析的手法(3)と比較的よく一致しており図解により $\eta_{eq}(\mu_0)$ を求めることも可能であると考えられるが、 $\mu_0 \geq 2.0$ においては $\eta_{eq}(\mu_0)$ の推定に問題のあることを示している。またFig. 6の修正Jennings系では $\mu_0 \leq 1.0$ においても履歴特性を有し、微小振動における固有振動数は $\eta_{eq}(0) = \sqrt{1+\alpha}$ となっている。これは履歴系の運動方程式の無次元化の際固有振動数と原系と降伏点を連ねる剛度より求めたためである。

4. 不規則波入力の場合の等価減衰定数

(1) 手法(1)

履歴振動系に不規則波が作用した時の式(1)を次式で示される等価減衰定数のみか応答変位 $\mu(t)$ の標準偏差 σ_μ の関数となる線形振動系に置換する。
$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + 2h_{eq}(\sigma_\mu) \frac{d\mu}{dt} + \mu = -f_s N(\gamma t) \quad (12)$$

調和波入力の結果である式(5)を不規則波入力の場合にも拡張して $h_{eq}(\sigma_\mu)$ を求めるためには、 μ_0 と σ_μ との間に何らかの等価な関係づけを行なえばよい。ごく自然な仮定として不規則応答 $\mu(t)$ における極大値 μ_p の期待値 $E[\mu_p]$ を近似的に μ_0 に等しくおく手法が考えられる。さて $E[\mu_p]$ は μ_p がRayleigh型確率密度関数 $P(\mu_p)$ を有するものとするとき次式となる。

$$E[\mu_p] = \int_0^\infty \mu_p P(\mu_p) d\mu_p = \frac{1}{\sigma_\mu} \int_0^\infty \mu_p^2 \exp\left(-\frac{\mu_p^2}{2\sigma_\mu^2}\right) d\mu_p = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\mu \quad (13)$$

上式の $E[\mu_p]$ を式(5)の μ_0 に代入すれば $h_{eq}(\sigma_\mu)$ が形式的ではあるが求まる。

(2) 手法(2)

式(1)を式(6)と同様に固有振動数および減衰定数がともに σ_μ の関数となる次式で示される線形振動系に置換する。

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + 2h_{eq}(\sigma_\mu) \eta_{eq}(\sigma_\mu) \frac{d\mu}{dt} + \eta_{eq}^2(\sigma_\mu) \mu = -f_s N(\gamma t) \quad (14)$$

手法(1)と同様に調和波入力の場合の結果である式(7)に式(13)を代入すれば $h_{eq}(\sigma_\mu)$ が形式的にはあるが容易に求まる。

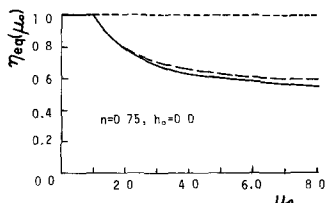
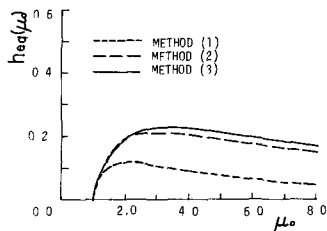


Fig. 4 Equivalent viscous damping and natural frequency of the bi-linear system (sinusoidal input)

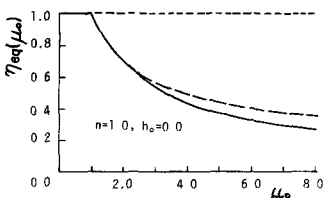
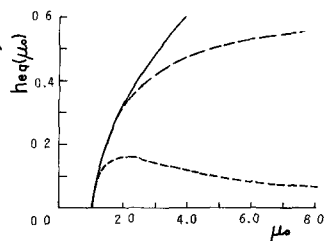


Fig. 5 Equivalent viscous damping and natural frequency of the elastoplastic system (sinusoidal input)

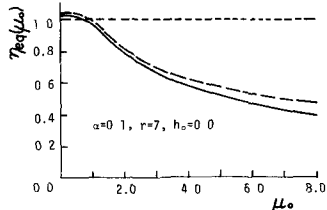
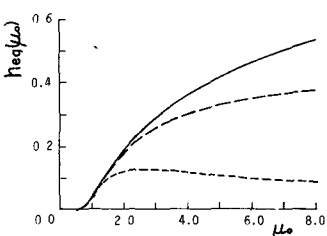


Fig. 6 Equivalent viscous damping and natural frequency of the modified Jennings' system (sinusoidal input)

(3) 手法(3)

手法(1),(2)は調和波入力の場合の結果を直接不規則波入力の場合に拡張したものであり、 $E[\mu_p] = \mu_0$ なる仮定は全く直感的でその理論的根拠に乏しい。ここではT.K.Caugheyにより拡張された等価線形化解法により $h_{eq}(\sigma_\mu)$ を求める。式(1)の応答 $\mu(\tau)$ に slowly varying parameter methodを適用し、次式なる式(11)と式(14)との誤差の2乗平均

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[(Z h_0 - Z h_{eq} \eta_{eq}) \frac{d\mu}{d\tau} + g(\alpha/\beta, \mu, \tau) - \eta_{eq}^2 \mu \right]^2 d\tau \quad (15)$$

を最小にするウーナー規範($\partial \bar{\varepsilon}^2 / \partial h_{eq} = 0, \partial \bar{\varepsilon}^2 / \partial \eta_{eq} = 0$)を用い、時間平均からアンサンブル平均へのエルゴード性を仮定すると $h_{eq}(\sigma_\mu), \eta_{eq}^2(\sigma_\mu)$ は式(9),(13)を用いて次式のように求まる。²⁾

$$\begin{aligned} h_{eq}(\sigma_\mu) &= h_0 / \eta_{eq}(\sigma_\mu) - \left\{ \int \mu_p S(\mu_p) P(\mu_p) d\mu_p / 2 \eta_{eq}^2(\sigma_\mu) \right\} \\ \eta_{eq}^2(\sigma_\mu) &= \left\{ \int \mu_p C(\mu_p) P(\mu_p) d\mu_p \right\} / \left\{ \int \mu_p^2 P(\mu_p) d\mu_p \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

ただし上式および等価線形系より得られる $\sigma_\mu = \text{func}(h_{eq}, \eta_{eq}, f_0)$ なる関係より履歴系の応答 σ_μ を解析的に求めることを付記しておく。

(4) 数値計算例

Fig. 7, 8に $N=0.75$ なるBi-linear系, $\alpha=0.1, r=7$ なる修正Jennings系の $h_{eq}(\sigma_\mu), \eta_{eq}(\sigma_\mu)$ を各手法について計算してそれぞれ図示した。不規則入力によるElasto-plastic系はその履歴特性が不安定であるので計算から除外した。調和波入力の結果の拡張である手法(1),(2)による値は $\mu_0 \doteq 1.25 \sigma_\mu$ としてFig. 4, 6の値をそのまま図示したものである。

したがってFig. 7において $\sigma_\mu \leq 0.8$ なる範囲では線形振動のみの結果となっている。一応近似的解析手法(3)では $h_{eq}(\sigma_\mu)$ および $\eta_{eq}(\sigma_\mu)$ が $\sigma_\mu \doteq 0.4$ 付近から増大および漸減し、不規則応答の特性を示している。手法(2)と手法(3)による $h_{eq}(\sigma_\mu)$ の値は $\sigma_\mu \geq 1.5$ において比較よく一致しているが、 $\eta_{eq}(\sigma_\mu)$ の値にはかなりの差があり、不規則振動時の等価線形フィルターの最適性の検討についてはシミュレーションの手法に依存するばかりない。 σ_μ を等しく選定するという規範においては手法(3)が外力強度および非線形性の小なる範囲で最適フィルターを与えることをデジタル計算機内のシミュレーションによりすでに確認している。²⁾ Fig. 8を見ると手法(2)による $h_{eq}(\sigma_\mu)$ は手法(3)より小さいが、 $\eta_{eq}(\sigma_\mu)$ は逆に大なる値を示していることが特徴的である。いずれにしても不規則応答において図式解法より $\eta_{eq}(\sigma_\mu)$ を推定すると、等価剛性を実際よりも大きくつまり危険側に見つかる結果となるから注意を要する。各手法による等価線形フィルターの最適性については今後シミュレーションなどを用いてさらに検討してゆく予定である。

終りに有益な助言を与えられた庵田弘行助教授に深謝するとともに、本文中の数値計算はすべて京都大学大型計算機センターFACOM 230-60によることを付記する。

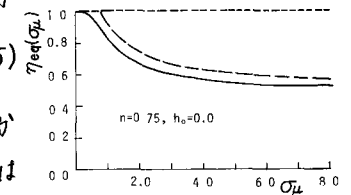
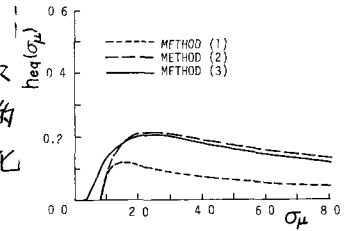


Fig. 7 Equivalent viscous damping and natural frequency of the bi-linear system (random input)

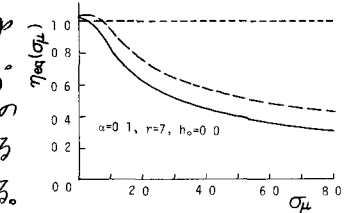
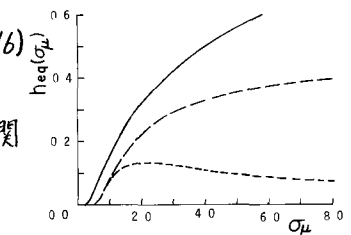


Fig. 8 Equivalent viscous damping and natural frequency of the modified Jennings' system (random input)

1)後藤・家村:土木学会論文報告集 No. 184, 1970-12, pp. 57-67. 2)庵田・家村:第3回地球工学シンポジウム(1970)講演集, pp. 349-356.