

1. まえがき 地震動は一般に時間的に不規則に変動し、その波形を確定関数として表現することが困難である。構造物の耐震解析に際してある地震動を想定するとしても、比較的確かなものとして選定できるパラメーターは、振幅の分布、周期特性、強度の時間的消長に関する平均的な性質程度である。したがって、実地震記録を用いるにせよ、人工的な模擬地震波を用いるにせよ、構造物の地震応答解析の結果を耐震設計という将来の荷重の問題に外延するに当たっては、設計に関与する応答量の、平均値のまわりでのばらつきを考慮することが必要となる。そのためには、不規則振動論の立場から問題を取り扱い、将来の地震荷重の下で構造物が破壊しない確率（非破壊確率）を求めておくことが重要である。ここで取り扱う最大応答の確率分布は、最大応答量にある許容値を設定しようとする設計法においてはそのまま非破壊確率を表わす重要な確率量であるが、その理論的取り扱いの困難さから、きわめて簡単な仮定に基づく解析がなされてきた。^{1)~3)} 著者らはそれらの仮定をも特殊な場合として包含し、さらに精度を向上させるような、より一般的な近似解法を、純出生過程の微分方程式から導き、^{4),5)} その結果を地震動を模擬する非定常確率過程入力に対する線形1自由度系の最大応答の問題に適用した。⁶⁾ その後行なった精度の検討の結果、この方法によっても、あるパラメーター領域では十分な精度が得られないことがわかったため、そのような場合に対しては異なった観点から、*peak envelope distribution* による解法を考えた。以下、それらの結果について報告する。

2. 地震動の表現

$g(t)$ を平均値ゼロで分散1なる無次元の正規定常確率過程、 $f(t, \tau)$ を最大値1なる正の確定関数、 β を加速度の次元を有する定数とし、地震加速度 $\ddot{z}(t)$ を次式で表わす。

$$\ddot{z}(t) = \beta f(t, \tau) g(t) \quad \text{-----}(1)$$

$f(t, \tau)$ としては次のような形を採用する。

$$f(t, \tau) = \frac{(1 + \frac{\tau}{t})^{(1 + 1/\xi)}}{\xi} e^{-st} (1 - e^{-\xi st}) \quad \text{-----}(2)$$

さらに、 $g(t)$ のパワースペクトル密度 $S_g(\omega)$ には次式を用いる。

$$S_g(\omega) = \frac{4h_0}{\pi\omega_0} \frac{(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{\{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\}^2 + 4h_0^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad T_0: \text{卓越周期} \quad \text{-----}(3)$$

式(1)で表わされる地動 $\ddot{z}(t)$ が、分散 β^2 なる定常確率過程から時間 τ の部分と切出したものと最大加速度の期待値 $\alpha_m = E[\alpha]$ を等しくする場合、この τ を $\ddot{z}(t)$ の等価継続時間と定義すると、近似的に次式をうる。⁶⁾

$$S/\omega_0 = C (\tau/T_0)^{-1.07} \quad \text{-----}(4)$$

C は ξ によって定まる係数⁶⁾で、本報告では $C = 0.077$ を用いている。

3. 線形1自由度系の応答標準偏差

前節で設定した地震動が線形1自由度系で表わされる構造物に作用した場合の相対応変位 $y(t)$ および速度 $\dot{y}(t)$ の標準偏差 $\sigma_y(t)$, $\sigma_{\dot{y}}(t)$ を図-1に示した。同図の時間軸は、地震動の等価継続時間 τ で無次元化してある。

同図において、 $\sigma_y(t)$, $\sigma_{\dot{y}}(t)$ が最大値をとる時刻は、地震動の強度が最大となる時刻 t_m より遅れて現れており、この傾向は τ が小さい固有周期 T_n が大きくて地震動が相対的に衝撃的なほど、減衰定数 h_n が小さくて初期条件の影響が長時間に及ぶほど著しいことが注目される。

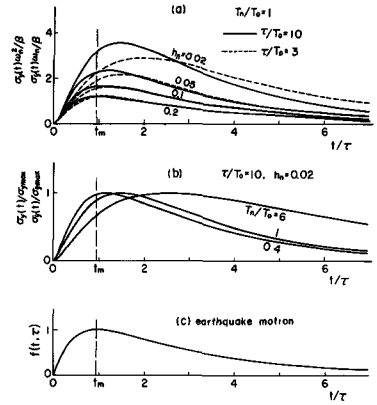


図-1 地震応答の標準偏差

4. 純出生過程による最大応答の確率分布の近似解

対象とする応答量を $y(t)$, その絶対最大応答を Y とすると、 Y の確率分布 $\Xi(Y)$ は次式で表される。

$$\Xi(Y) = P[\max |y(t)| \leq Y; 0 \leq t < \infty] \quad \text{----- (5)}$$

純出生過程の基礎微分方程式を解いた結果を式(5)に代入し、さらに応答の時間的相関について近似の評価を行なって、式(5)に対する近似式が次のように得られた。(4), (5)

$$\Xi(Y) \cong P[|y(0)| \leq Y] \exp \left\{ - \int_0^{\infty} \bar{c}_0(Y, t) dt \right\} \quad \text{----- (6)}$$

$$\bar{c}_0(Y, t) = Q_1(Y, t) / Q_2(Y, t)$$

$$Q_1(Y, t) = \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} d\xi_1 \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} d\xi_2 \cdots \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} \left\{ \int_0^t |\xi_t| \phi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, -\frac{Y}{\delta_y}, \xi_t) d\xi_t \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \xi_t \phi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{Y}{\delta_y}, \xi_t) d\xi_t \right\} d\xi_r \quad \text{----- (7)}$$

$$Q_2(Y, t) = \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} d\xi_1 \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} d\xi_2 \cdots \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} d\xi_r \int_{-Y/\delta_y}^{Y/\delta_y} \phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_y) d\xi_t \quad \text{----- (8)}$$

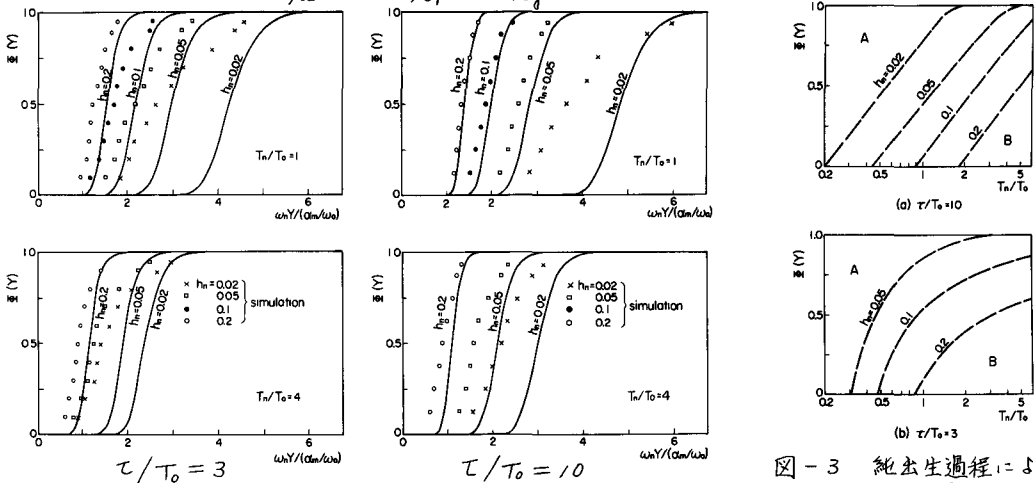


図-2 最大地震応答の確率分布 (純出生過程による解法)

図-3 純出生過程による解法の適用範囲

t_i は、 $\xi_i = y(t_i)/\delta_i$, $\delta_i^2 = E[y^2(t_i)]$; ($i=1, 2, \dots, r$), $\xi_t = y(t)/\delta_t$, $\delta_t^2 = E[y^2(t)]$,
 $\xi_t = y(t)/\delta_t$, $\delta_t^2 = E[y^2(t)]$, t_i は $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_r < t$ なる任意の時刻であり、
 $\phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t, \xi_t)$ および $\phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t, \xi_t)$ はそれぞれの変数の同時確率密度関数である。 $y(t)$ が正規分布をなす場合には、式(7), (8)の積分回数を1回減ずることができる。

かくして得られた至(Y)の近似解の例を図-2に示した。ここでは、式(7), (8)で $r=1$ とした第2次近似を用いており、 $t_1 = t - T_n/2$ としている。また同図には、併せて行なったシミュレーションによる実験値も示してある。これらの結果からわかるように、お生過程による近似解は η_n , T_n/T_0 が大きいほど、 τ/T_0 が小さいほど精度が低下する。その原因としては次のような事項が考えられる。
 i) η_n が小さくなると、かなり隔った時刻(たとえば T_n の数倍)の間でも応答間に高い相関があり、ここで用いた近似解法でも十分な精度が期待できない。ii) τ/T_0 が小さいか、 T_n/T_0 が大きくなると、図-1において、 $\delta_y(t)$ が最大値をとる時刻には $f(t, \tau)$ はすでにかなり減少していることから、それ以後の応答は、減衰自由振動の影響が強いと考えられる。したがって、この部分も最大応答値に貢献すると考える本解法では、最大応答を過大に推定する結果となる。

以上の結果において、たとえば図-2の $\eta_n=0.05$, $T_n/T_0=1$, $\tau/T_0=10$ の場合を許容しうる誤差の限度とすれば、純お生過程による解法を適用できる範囲は図-3のA領域として示される。たとえば、図-3(a)において、 $\eta_n=0.1$, $T_n/T_0=2$ であれば、この解法は至(Y)>0.4の範囲で適用可能である。

5. peak envelope distribution による最大応答の確率分布の近似解

純お生過程による近似解の精度が低下するパラメーター領域では、その原因として前述した事項からわかるように、 $\delta_y(t)$ が最大値 $\delta_{y\max}$ をとる時刻前後の応答のみが最大応答に関与し、それ以後の応答は主として自由振動によるものとして無視するような解法が望ましい。ここでは、S.O. Rice が定常過程に対して導いた peak envelope distribution の方法を応用する。

不規則外力に対する構造物の応答は、一般に固有周期に近い周期で振動する狭帯域の確率過程となり、図-4のように振動周期と比較してゆるやかに変動する包絡線 $W(t)$ を持つ。包絡線 $W(t)$ の極値は、それが発生した時刻前後での応答 $y(t)$ の絶対最大値とみなしてよいから、 $\delta_y(t) = \delta_{y\max}$ となる時刻近傍における $W(t)$ の極大値が地震動

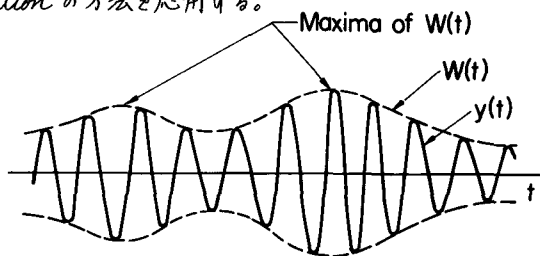


図-4 応答の包絡線 $W(t)$ の極値(peak envelope)

に対する最大応答を表わすものと考ええる。狭帯域の確率過程における包絡線の極値の確率分布は S.O. Rice²⁾ によって取り扱われ、定常過程に対する解が与えられている。本研究では構造物の応答は非定常であるが、本節で問題にしている $\delta_y(t)$ が最大値をとる時刻前後では、 $y(t)$ はほぼ定常過程とみなせるから、Riceの結果を構造物の応答に適用して解析を進めた結果、最大応答の確率密度関数 $\phi_E(Y)$ が次のように得られた。

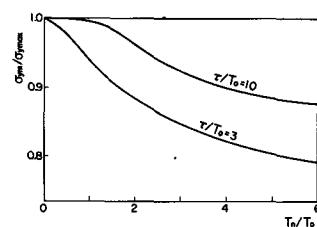


図-5 δ_y と $\delta_{y\max}$ の換算

$$\phi_E(Y) = \frac{1}{4\delta_{ym}\sqrt{\alpha^2-1}} \exp\left\{-\alpha^2 Z^2 \left(\frac{Y}{\delta_{ym}}\right)^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n A_n}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{7}{4})} \left(\frac{Y}{\delta_{ym}}\right)^n / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{5}{4}) A_n}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}) \alpha^n} \quad \text{----- (9)}$$

$$A_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n+1 + \sum_{m=1}^n \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}) \cdots (n-\frac{1}{2})}{m!} (n-m+1) \theta^m, & n>0 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(3-\alpha^2), \quad \alpha^2 = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma^2(\frac{3}{4})}, \quad Z = \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4})} \{ 2(\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4}) - \Gamma^2(\frac{3}{4})) \}^{\frac{1}{2}} \right]$$

式(9)を用いると、最大応答の確率分布は次式より算出される。

$$\Xi(Y) \cong \Xi_E(Y) = \int_0^Y \phi_E(Y) dY \quad \text{----- (10)}$$

式(9)の中の δ_{ym} は、応答強度が最大となる前後における $\delta_y(t)$ の平均的な値であり、数値計算の結果から、図-5によって $\delta_{y\max}$ から換算すればよいことがわかった。

このようにして *peak envelope distribution* から得られた最大応答の確率分布の計算例を図-6に示した。また、図-3と同様にして *peak envelope distribution* による解法の適用範囲を示したのが図-7である。図-2と図-5、あるいは図-3と図-7を比較すると、純出生過程による解法の精度が低下する範囲では *peak envelope distribution* による解法の精度が良く、逆に純出生過程による解法の精度が良い範囲、すなわち応答 $y(t)$ が全継続時間にわたってランダムな性質を持っている場合には、*peak envelope distribution* による解法の精度が悪化することがわかる。

6. おおむね 最大地震応答に関する二つの解法について考察したが、一般に、比較的短周期の構造物に定常的な地震動が作用する場合には純出生過程による解法、比較的長周期の構造物に衝撃的な地震動が作用する場合には *peak envelope distribution* による解法が優れているといえる。

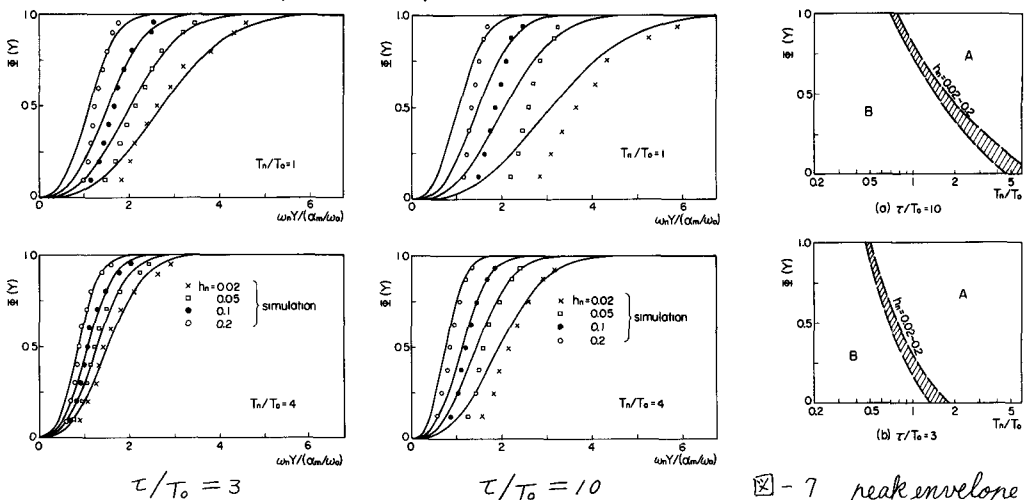


図-6 最大地震応答の確率分布 (*peak envelope distribution*)

図-7 *peak envelope* による解法の適用範囲

- 1) Davenport: Proc. ICE, Vol. 19, 1961, 2) 小松: 土木学会論文集, 142号, 昭.42.
- 3) 山田・竹宮: 土木学会論文報告集, 172号, 昭.44, 4) 後藤・亀田: 京大防災研年報, 11号, 昭.43, 5) 同, 12号, 昭.44,
- 6) 亀田: 土木学会年次学術講演会, I75, 昭.45, 7) Rice: Selected Papers on Noise and... (Nax編), Dover, 1954.