

地中埋設管の振動性状について

京都大学工学部 正員 後藤尚男
 京都大学防災研究所 正員 土岐豊三
 京都大学大学院 学生員 高田至郎

1. 緒言

地中に埋設された管状構造物の地震時における振動性状については、未だに解明されていない点が多い。構造物周囲を取り巻く地盤そのものが複雑な要素をもち、それらの地盤内を伝播する入力としての地震波動は多種多様であり、その伝播方向や位相差が問題となってくる。また、埋設管は平面的な広がりをもち、異質地盤層にわたって設けられている場合が多く、その影響も考慮されねばならない。さらに、埋設管の振動性状は、埋設地点での地盤の動きに追随している場合が多いといわれているが、地盤と埋設管との境界での運動を明らかにしていくことなども重要であろう。本研究では、以上のような問題点を解明していく一手段として、地盤-埋設管の振動系をモデル化し、とくに、埋設管の振動性状に及ぼす周辺地盤の剛性の影響について、弾性波動論を用いて解析的に取り扱ったものである。最初に、一様な地盤中にある埋設管が、両端において軸方向変位が規制されている条件のもとで、その長さ方向の振動も取り扱い、地盤と埋設管の剛度比や埋設管の形状が、管内に発生する軸ひずみ等に及ぼす影響について検討を加えた。次に、埋設管の横断面について、地盤-埋設管の振動系を考え、地盤中を伝播してくるせん断波を受ける場合を対象として、埋設管による波動の散乱現象も解析し、その反力として管内に生じる応力の分布や振動圧の周波数応答を求め、地盤との相互作用について考察を加えた。

2. 埋設管の軸方向振動

Fig. 1 のように、一様な地盤中に、外径 b 、内径 a 、長さ l の弾性管が埋設されており、両端は同位相で z 軸方向に強制変位 $U_0 e^{i\omega t}$ で振動する地中構造物に連結されているものとする。また、連結点では、埋設管の z 軸方向の相対変位はゼロとなるように規制されており、半径方向の運動については、自由に滑りうる条件となっている場合も対象として解析をすすめていく。

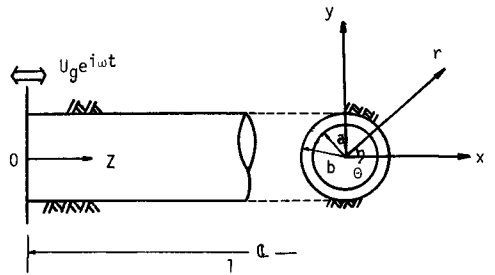


Fig. 1 Model of under ground pipe

管表面 ($r=b$) の境界では、埋設管と地盤との間には相対的なずれがなく、変位と応力の連続条件が成立しているものとし、管内表面 ($r=a$) では、自由表面の条件を満足しているものとする。Fig. 1 に示すような円筒座標 (r, θ, z) を用い、それぞれの方向の相対変位を (u_r, u_θ, u_z) で表示する。 θ 方向については、振動方向も考慮して $u_\theta = 0$ が成り立つものとし、 u_r, u_z については、 θ に関して独立であるとする。また応力を τ_{rr}, τ_{rz} で表示し、添字 1, 2 をそれぞれ地盤と埋設管を表わすものとするれば、以上に述べた境界条件は次のように表わされる。

$$z = 0, l \quad : \quad u_z = 0$$

$$\left. \begin{aligned} r=a & : \quad \tau_{rr}^{(2)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0 \\ r=b & : \quad \tau_{rr}^{(1)} = \tau_{rr}^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

次に、地盤および埋設管の運動方程式は円筒座標系で表示された波動方程式より次のように表わすことができる。ただし、 ρ , λ , μ は密度およびラメの定数である。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \rho u_0 \omega^2 e^{i\omega t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

さらに式(1)の第1式の条件を満たすように、棒の縦振動の正規関数を用いて展開し、しかる後、式(2)を変数分離の手法を用いて変形すれば、 r に関してはベッセルの微分方程式に帰着される。地盤は半径方向に無限の領域を有し、一方、埋設管については、有限域に波動が閉じ込められることを考慮して、方程式の解も選ぶことにより、地盤、埋設管の変位はそれぞれ次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(1)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ A_m \frac{P_m^*}{P^2} H_1^{(2)}(P_m^* r) + B_m \frac{T_m}{P^2} H_1^{(2)}(K_m^* r) \right\} \cos T_m z e^{i\omega t} \\ u_z^{(1)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ A_m \frac{T_m}{P^2} H_0^{(2)}(P_m^* r) - B_m \frac{K_m^*}{P^2} H_0^{(2)}(K_m^* r) - \frac{P^2}{P_m^{*2}} \frac{4u_0}{T_m l} \right\} \sin T_m z e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(2)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ M_m \frac{P_m^*}{P^2} H_1^{(2)}(P_m^* r) + N_m \frac{T_m}{Q^2} H_1^{(2)}(Q_m^* r) + R_m \frac{P_m^*}{P^2} H_1^{(1)}(P_m^* r) + S_m \frac{T_m}{Q^2} H_1^{(1)}(Q_m^* r) \right\} \cos T_m z e^{i\omega t} \\ u_z^{(2)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ M_m \frac{T_m}{P^2} H_0^{(2)}(P_m^* r) - N_m \frac{Q_m^*}{Q^2} H_0^{(2)}(Q_m^* r) + R_m \frac{T_m}{P^2} H_0^{(1)}(P_m^* r) - S_m \frac{Q_m^*}{Q^2} H_0^{(1)}(Q_m^* r) - \frac{P^2}{P_m^{*2}} \frac{4u_0}{T_m l} \right\} \sin T_m z e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ここに、 $A_m \sim S_m$ は未定係数であり、式(1)の6個の境界条件式より決定されるものである。 P_m^* , K_m^* ; Q_m^* , S_m^* はそれぞれ、地盤と埋設管について、その媒体中を伝播する縦波、横波の速度が関与する量であり、 $P_m^{*2} = P^2 - T_m^2 = (\omega/v_p^2)^2 - (m\pi/l)^2$ 等の形で与えられる。式(3), (4)を用いて応力を求め、式(1)に代入することによって未定係数に関する次の連立方程式が得られる。

$$\{a_{ij}\} \{C_j\} = \{b_i\} \text{----- (5)}$$

ここに、 $\{C_j\} = \{A_m, B_m, M_m, N_m, R_m, S_m\}^T$ で与えられ、 $\{b_i\}$ は振動系に作用する外力項である。また、 $\{a_{ij}\}$ は未知数にかかる係数でつくられた 6×6 のマトリックスであり、 $|a_{ij}| = 0$ はこの系の固有値を決定する振動数方程式となる。式(5)を解き、その結果を用いることによって管の変位、ひずみ、応力が決定されることになる。

3. 埋設管による波動の散乱

Fig. 2 に示すように、周囲を地盤に取り巻かれた管の横断面における振動系を対象として、鉛直下

下方より x の正の方向に速度 $v_x^{(i)}$ で伝播するせん断波が埋設管によって散乱される現象を解析的に取り扱っていく。直角座標で表わされたせん断波の変位 u_g を極座標を用いて表示し、さらに、Jacobiの展開法によってベッセル関数の級数和として表わすと、

$$u_g = u_0 e^{ik(x - v_x^{(i)} t)} \\ = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos m\theta J_m(kr) e^{-ikv_x^{(i)} t} \quad (6)$$

ここに、 ε_m は $m=0$ で1、他の m に対しては2の値をとる関数である。伝播波の半径方向、接線方向の変位成分 u_r 、 u_θ は、適当な式の変形を用いることによって次のように求まる。

$$u_r = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{m-1} m \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m\theta e^{-ikv_x^{(i)} t}, \quad u_\theta = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{m-1} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial (kr)} \cos m\theta e^{-ikv_x^{(i)} t} \quad (7)$$

伝播波は埋設管によって散乱され、管の内部および無限外方に向けて縦波、横波の2種類の散乱波が生じる。散乱波の変位ポテンシャルを ψ で表示すれば、これらは波動方程式を満足する。地盤および埋設管の変位成分 u_r 、 u_θ は、 ψ の和として書き表わされ、極座標系の波動式を解くことによって次のように求められる。

$$u_r^{(i)} = u_r + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \frac{\partial H_m^{(i)}(k_1 r)}{\partial r} - m B_m \frac{H_m^{(i)}(k_1 r)}{r} \right\} \sin m\theta e^{-i\omega t} \\ u_\theta^{(i)} = u_\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ m A_m \frac{H_m^{(i)}(k_1 r)}{r} - B_m \frac{\partial H_m^{(i)}(k_1 r)}{\partial r} \right\} \cos m\theta e^{-i\omega t} \quad (8)$$

$$u_r^{(v)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ M_m \frac{\partial H_m^{(v)}(k_2 r)}{\partial r} - m N_m \frac{H_m^{(v)}(k_2 r)}{r} + R_m \frac{\partial H_m^{(v)}(k_2 r)}{\partial r} - m S_m \frac{H_m^{(v)}(k_2 r)}{r} \right\} \sin m\theta e^{-i\omega t} \\ u_\theta^{(v)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ m M_m \frac{H_m^{(v)}(k_2 r)}{r} - N_m \frac{\partial H_m^{(v)}(k_2 r)}{\partial r} + m R_m \frac{H_m^{(v)}(k_2 r)}{r} - S_m \frac{\partial H_m^{(v)}(k_2 r)}{\partial r} \right\} \cos m\theta e^{-i\omega t} \quad (9)$$

ここに、 k_1 、 k_2 は地盤を伝播する縦波、横波の波数を表わし、 k_2 は埋設管によるそれらを表わしている。境界条件として、埋設管と地盤との間に相対変位がないものとするれば、 $r=b$ で応力と変位が連続であり、 $r=a$ では直応力と接線応力がゼロとなる。これらの条件式より、式(8)、(9)から応力を求めることによって未定係数 $A_m \sim S_m$ が決定されることになる。散乱波の反力として埋設管には振動圧が作用することになるが、応力を埋設管の内周に沿って積分することにより、合力が求められる。合力の x 、 y 方向の成分を F_x 、 F_y とすれば、それらは三角関数の直交性を用いて演算することによって次のように求められる。

$$F_x = \int_0^{2\pi} \{ \sigma_r \sin\theta + \tau_{r\theta} \cos\theta \} b d\theta = 0 \quad (10)$$

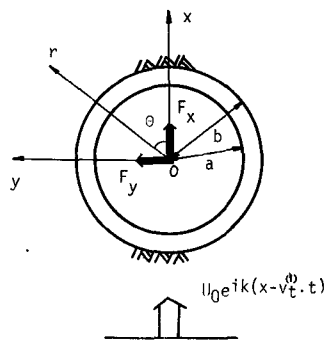


Fig.2 Wave scattering

$$F_y/z\mu_b\pi k_1 u_0 \bar{e}^{i\omega t} = J_1(k_1 b) - A_1 H_1^{(0)}(k_1 b) + B_1 H_1^{(0)}(k_1 b) \quad \text{----- (11)}$$

4. 数値計算および考察

数値計算にあたっては、特に、埋設管の管厚と周辺地盤の剛性の影響を検討することを目的として、鋼管が砂地盤中 (CASE1) および岩石地盤中 (CASE2) に埋設されている場合について計算を行なった。

	μ_1/μ_2	ρ_1/ρ_2	ν_1	ν_2	z/l	b/l	b/a
CASE1	0.00043	0.217	0.4	0.3	0.25	0.03	1.01~1.10
CASE2	0.029	0.254	0.25	0.3	0.25	0.03	1.01~1.10

Fig. 3 は無次元表示された軸ひずみの周波数応答を示したものである。横軸は入力周波数 ω を棒の縦振動 1 次固有振動数 ω_1 で除したものであり、 ω_1 より若干高いところで共振点をもっているのは、地盤による軸方向拘束力の影響によるものと考えられる。また、地盤の剛性が大きくなれば埋設管固有の振動性状は顕著ではなく、埋設管は地盤と一体となって振動していることを示しているものと思われる。Fig. 4 は管厚が大きくなれば、発生する軸ひずみは指数的に減少していくことを示しており、この傾向は $\omega/\omega_1 < 1$ の周波数領域においてはほとんど変化していない。Fig. 5 は式 (11) に示した振動圧の周波数応答を求めたものであり、地盤剛性の高い CASE2 については管の固有振動は見られない。また、 $h_1 a < 1$ では、振動圧は入力周波数にほぼ、1 次比例的であり、このことは、管に作用する振動圧は入力波数の速度に影響されることを示すものといえよう。Fig. 6 は振動圧に及ぼす管厚の効果について見たものである。管厚に比例して振動圧は大きくなっており、 b/a が小さい場合には、埋設管の変形により振動圧が低減されるものと思われる。Fig. 7 は地盤と埋設管の接触面における応力の分布形状を示したものである。周波数によってその形状は異っており、さらに、地盤剛性による相異も顕著に見られる。

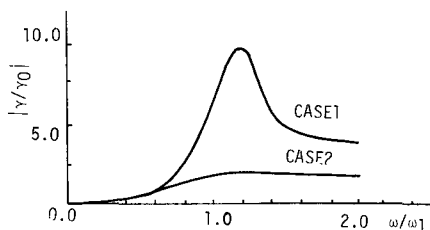


Fig.3 Resonance curve of axial strain

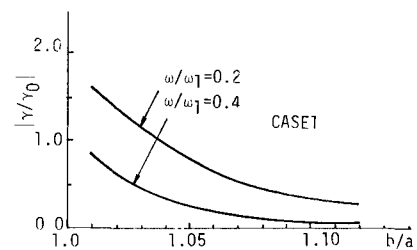


Fig.4 Relation between axial strain and b/a

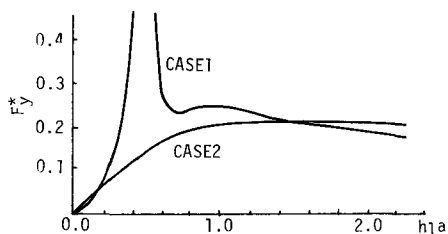


Fig.5 Resonance curve of earthpressure

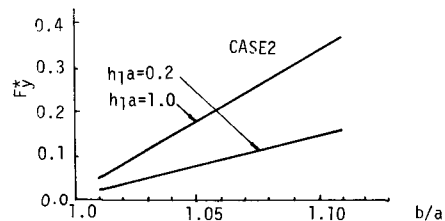


Fig.6 Relation between earthpressure and b/a

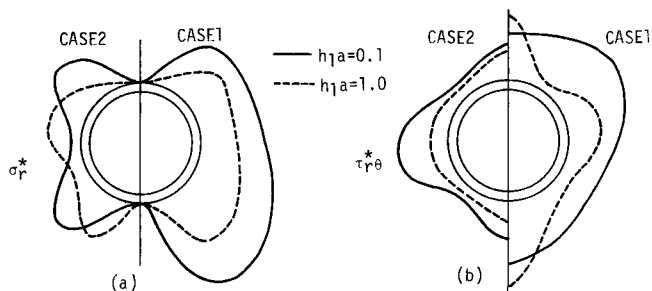


Fig.7 Stress distribution