

構造物の不規則振動に関する一考察
 ——応答が一定レベルを超える回数について——

京都大学工学部 正会員 後藤尚男, ○亀田弘行

1. まえがき 動的外力としての地震動がきわめて不規則な波形を示し、しかもそれが将来再現されない性質のものであるところから、地震動を確率過程として取り扱い、地震時における構造物の挙動を不規則振動論の立場から解析することの重要性が認識されつつある。不規則外力に対する設計法を確立するためには、構造物の非破壊確率を求めることが重要であるが、著者らは、従来の弾性設計法のように応答量の最大許容値を設定する場合に構造物の非破壊確率を表わす最大応答の確率分布について研究を進めており、その結果の一部をすでに報告した^{1), 2)}。しかし一般に動的外力による構造物の破壊は最大応答のみで一義的に定まるものではなく、くり返し載荷による破壊の進行に対しても十分な考慮が払われるべきである。本研究は、このような観点から、不規則外力を受ける構造物の応答が一定レベルを超える回数の確率統計的性質について論じたものである。

2. 基本的考察

対象とする構造物の応答を $y(t)$ とし、継続時間 T の間に $|y(t)|$ が Y を超える回数を論ずる。はじめに、図-1のように、 $|y(t)|$ が $(0, t)$ で Y を $n-1$ 回超過し、かつ n 回目の超過が $(t, t+dt)$ で生ずるという事象を $R_p(n, Y, t)$ で表わすものとし、これを用いて $p_n(Y, t)$, $\tilde{p}_n(Y, t)$ を次式のように定義する。

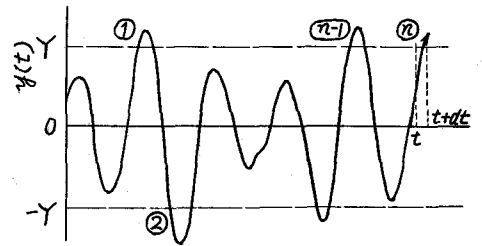


図-1 不規則外力に対する構造物の
 応答の概念図 (②は、 $|y(t)|$ が
 n 回目に Y を超えることを示す。)

$$\left. \begin{aligned} p_n(Y, t) dt &= P[R_p(n, Y, t) | |y(0)| \leq Y] \\ \tilde{p}_n(Y, t) dt &= P[R_p(n, Y, t) | |y(0)| > Y] \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

式(1)の $p_n(Y, t)$, $\tilde{p}_n(Y, t)$ は、first-passage-time density の概念を拡張したもので、 n th, -passage-time density とも呼ぶべきものである。同式を用いると、応答の継続時間 T 内で $|Y(t)|$ が Y を n 回超える確率 $\pi_n(Y, T)$ は次式により表わされる。

$$\pi_n(Y, T) = \begin{cases} a_0(Y) \{1 - \int_0^T p_1(Y, t) dt\} & , (n=0) \\ a_0(Y) \left\{ \int_0^T p_1(Y, t) dt - \int_0^T p_2(Y, t) dt \right\} + \tilde{a}_0(Y) \left\{ 1 - \int_0^T \tilde{p}_1(Y, t) dt \right\} & , (n=1) \\ a_0(Y) \left\{ \int_0^T p_n(Y, t) dt - \int_0^T p_{n+1}(Y, t) dt \right\} + \tilde{a}_0(Y) \left\{ \int_0^T \tilde{p}_{n-1}(Y, t) dt - \int_0^T \tilde{p}_n(Y, t) dt \right\} & , (n \geq 2) \end{cases} \text{----- (2)}$$

ただし、 $a_0(Y) = P[|y(0)| \leq Y]$, $\tilde{a}_0(Y) = 1 - a_0(Y) = P[|y(0)| > Y]$

したがって、 T 内での超過回数が n 以下となる確率、すなわち応答レベル Y を超える回数 n の確率分布を $\pi_p(n, Y, T)$ とすると、

$$\Xi p(n, Y, \tau) = \sum_{\nu=0}^n \Xi_{\nu}(Y, \tau) = \begin{cases} a_0(Y) \{1 - \int_0^{\tau} p_1(Y, t) dt\} & , (n=0) \\ 1 - \{a_0(Y) \int_0^{\tau} p_{n+1}(Y, t) dt + \tilde{a}_n(Y) \int_0^{\tau} \tilde{p}_n(Y, t) dt\} & , (n \geq 1) \end{cases} \quad (3)$$

3. $p_n(Y, \tau)$, $\tilde{p}_n(Y, \tau)$ の誘導

時間軸上の $(0, \tau)$ を $t_i = i\Delta t$, $(i=0, 1, 2, \dots, m; \Delta t = \tau/m)$ によって m 個の区間に分割する。区間 (t_{i-1}, t_i) で $|y(t)|$ がレベル Y を超えるという事象を e_i , $|y(0)| \leq Y$ なる事象を g_0 , それらの余事象をそれぞれ $\bar{e}_i$, $\bar{g}_0$ とすると, $p_n(Y, \tau)$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} p_n(Y, \tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \left[\bigcap_{i_1=1}^{m-1} \bigcap_{i_2=i_1+1}^{m-2} \dots \bigcap_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-1} \bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_{i_{n-1}-1} e_{i_{n-1}} \bar{e}_{i_{n-1}+1} \dots \bar{e}_{i_n-1} e_{i_n} \bar{e}_{i_n+1} \dots \bar{e}_{m-1} e_m | g_0 \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \left[\bigcap_{i_1=1}^{m-1} \bigcap_{i_2=i_1+1}^{m-2} \dots \bigcap_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-1} (1-e_1)(1-e_2) \dots (1-e_{i_{n-1}-1})(1-e_{i_{n-1}}) \dots (1-e_{i_n-1})(1-e_{i_n}) \dots (1-e_{m-1}) e_m | g_0 \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \binom{n+m-2}{n-1} \int_0^{\tau} dt_1 \int_{t_1}^{\tau} dt_2 \dots \int_{t_{n+m-3}}^{\tau} f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_{n+m-2}, t) dt_{n+m-2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = P \left[\bigcap_{i=1}^n \{ |y(t_i)| \leq Y \cap |y(t_i + dt_i)| > Y \} | g_0 \right]$$

同様に,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(Y, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \binom{n+m-2}{n-1} \int_0^{\tau} dt_1 \int_{t_1}^{\tau} dt_2 \dots \int_{t_{n+m-3}}^{\tau} \tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_{n+m-2}, t) dt_{n+m-2} \quad (5) \\ \tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n &= P \left[\bigcap_{i=1}^n \{ |y(t_i)| \leq Y \cap |y(t_i + dt_i)| > Y \} | \bar{g}_0 \right] \end{aligned}$$

4. 再生過程による近似解

前節までに得られた結果は厳密解であるが, 式(4), (5)で $f_s, \tilde{f}_s$ の次元数は無限大まで必要であり, 構造物の応答のように相異なる時刻間の相関の強い確率過程では, それらの数値解を求めることは不可能に近い。ここでは近似解を得るために, 次のような二つの仮定を行なう。(1) $y(t)$ を定常過程とする。(2) 図-1において $|y(t)|$ が Y を n 回目に超過する時刻はそれ以前の超過回数およびそれらが生じた時刻と独立ではないが, いまこれを, $n-1$ 回目の超過の時刻のみに影響されるものとする。すなわち, $|y(t)|$ が Y を超過する過程は再生過程を構成するものと考え³⁾。

これらの仮定により $f_s, \tilde{f}_s$ は次式のように表わされる。

$$f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_s(Y; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} f_c(Y; t_{i+1} - t_i), \quad \tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) = \tilde{f}_s(Y; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{f}_c(Y; t_{i+1} - t_i) \quad (6)$$

ただし,

$$f_c(Y, t) dt = P \{ |y(t)| \leq Y \cap |y(t+dt)| > Y | |y(0)| \leq Y \cap |y(dt)| > Y \}$$

式(6)を式(4), (5)に代入し, Laplace 変換・逆変換を行なえば, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} p_n(Y, \tau) + \sum_{\nu=1}^n \binom{n}{\nu} \int_0^{\tau} dt_1 \int_{t_1}^{\tau} dt_2 \dots \int_{t_{\nu-1}}^{\tau} p_n(Y, t_1) f_c(Y, t - t_{\nu}) \prod_{\mu=1}^{\nu-1} f_c(Y, t_{\mu+1} - t_{\mu}) dt_{\nu} \\ = \int_0^{\tau} dt_1 \int_{t_1}^{\tau} dt_2 \dots \int_{t_{n-2}}^{\tau} f_s(Y, t_1) f_c(Y, t - t_{n-1}) \prod_{\mu=1}^{n-2} f_c(t_{\mu+1} - t_{\mu}) dt_{n-1} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(Y, t) + \sum_{\nu=1}^n \binom{n}{\nu} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{\nu-1}}^t \tilde{P}_n(Y, t_\nu) f_c(Y, t - t_\nu) \prod_{\mu=1}^{\nu-1} f_c(Y, t_{\mu+1} - t_\mu) dt_\nu \\ = \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-2}}^t \tilde{f}_s(Y, t_1) f_c(Y, t - t_{n-1}) \prod_{\mu=1}^{n-1} f_c(Y, t_{\mu+1} - t_\mu) dt_{n-1} \quad \text{---- (8)} \end{aligned}$$

このようにして得られた式(7), (8)もあまり簡単な形ではないが, 多重積分はたかだか \$n\$ 重であり, しかも時間軸上で *recursive* に $P_n, \tilde{P}_n$ を求めることができるので, 式(4), (5)と比較すれば数値計算ははるかに容易である。また, 式(7), (8)に現われる $f_s(Y, t), \tilde{f}_s(Y, t), f_c(Y, t)$ は, *threshold-value crossing* の問題⁴⁾を適用することにより次式のように表わされる。

$$f_s(Y, t) = \frac{1}{a_o(Y)} \left\{ \int_{-Y}^Y dy(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_1(y(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_{-Y}^Y dy(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_1(y(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right\} \quad \text{---- (9)}$$

$$\tilde{f}_s(Y, t) = \frac{1}{a_o(Y)} \left\{ N_c(Y) - a_o(Y) f_s(Y, t) \right\} \quad \text{---- (10)}$$

$$\begin{aligned} f_c(Y, t) = \frac{1}{N_c(Y)} \left\{ \int_0^\infty \dot{y}(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_2(Y, \dot{y}(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^\infty \dot{y}(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_2(Y, \dot{y}(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right. \\ \left. + \int_0^\infty \dot{y}(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_2(-Y, -\dot{y}(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^\infty \dot{y}(0) \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_2(-Y, -\dot{y}(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right\} \quad \text{---- (11)} \end{aligned}$$

$$N_c(Y) = \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_o(Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^\infty \dot{y}(t) \phi_o(-Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \quad \text{---- (12)}$$

ただし, $\phi_o(\dot{y}(t)), \phi_1(y(0), \dot{y}(t)), \phi_2(y(0), y(0), \dot{y}(t), \dot{y}(t))$ はそれぞれの変数の同時確率密度関数である。

5. 線形 / 自由度系の応答への適用例

外力として *white noise* の作用を受ける線形 / 自由度系の応答に対して前述の解法を適用し, 数値計算を行なった。この場合は, 式(9) ~ (12) の ϕ_o, ϕ_1, ϕ_2 は正規分布となり, 同式中の二重積分は解析的に一重積分とすることが出来る。図-1, 2 に $f_s(Y, t), f_c(Y, t)$ の計算結果を示した。同図中で T_n は構造物の固有周期, ω_n は固有円振動数, ρ_n は減衰定数, σ_y は $y(t)$ の標準偏差を示す。 n が大きくなるに従って $f_s(Y, t), f_c(Y, t)$ とともに初期条件の影響から脱出し, 一定値に近づくのがわかる。これらの計算結果を用いて式(7) から $P_n(Y, t)$ を求めた結果を図-3 に示した。同図の (a), (b), (c) は, 応答レベルによる差異を示す。同図より, n が大きいほど $g_n(Y, t)$ のピークが時間軸上で右へ移動することが当然の結果として観察できる。さらに, 図-1, 2 の f_s, f_c の値の代りにそれらの $t \rightarrow \infty$ における極限值を用いると, 構造物の応答が過去の経歴に対して独立であると仮定する, いわゆる *Poisson Process approximation* の最も簡単な場合となるが, 図-3 にはこのような場合に対する計算結果をも示した。その値は, 本研究のより厳密な解法の結果とはかなり異なっており, 基本仮定に対する精度の吟味の重要性を示していると言えよう。 $\tilde{P}_n(Y, t)$ についても同様の結果が得られた。

以上の結果を式(3)に用いて応答が時間 t 内で Y を超過する回数 n の確率分布 $p_n(n; Y, t)$ を算出した。結果の一例が図-4 である。以上の方法を地震応答に適用するため, 今後非定常性を加味して考察を進めて行くつもりである。

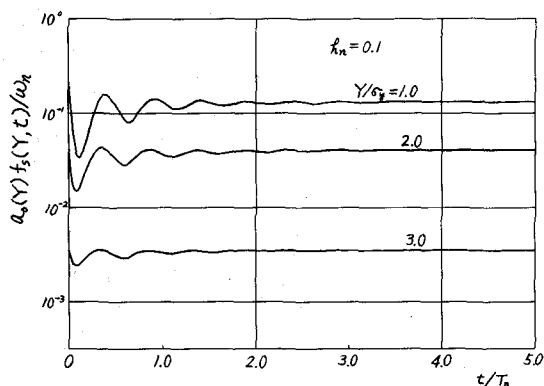


図-1 確率パラメータ $f_s(Y, t)$

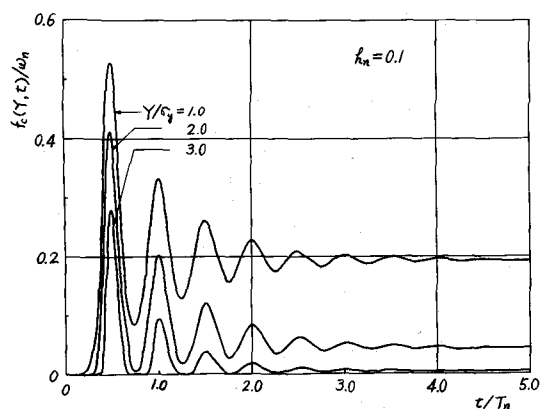


図-2 確率パラメータ $f_c(Y, t)$

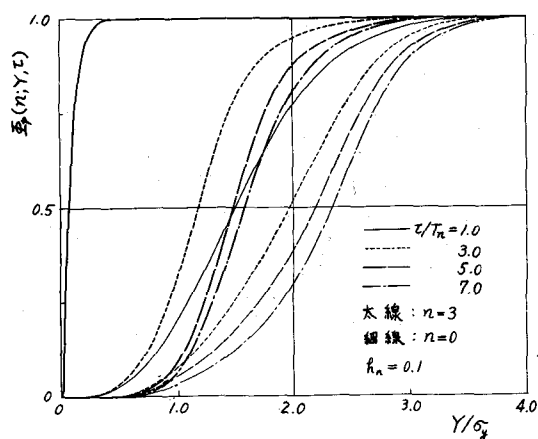


図-4 応答変位レベル Y を超える回数の確率分布

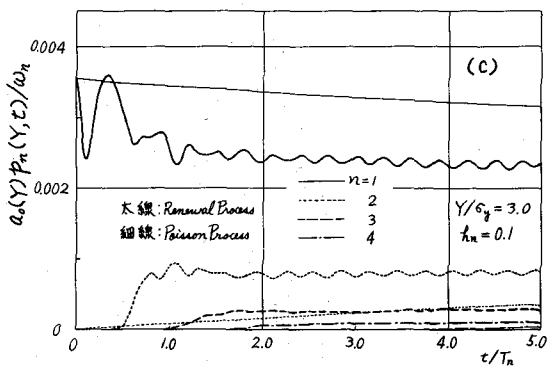
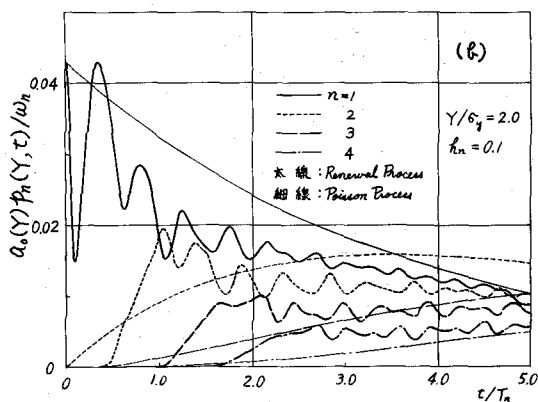
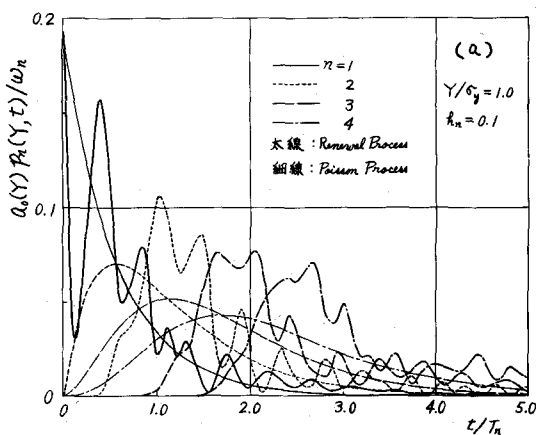


図-3 n th-Passage-Time Probability Density $P_n(Y, t)$

参考文献

- 1) 後藤・亀田：京大防災研究所年報 No. 11A, 昭43.3.
- 2) 後藤・亀田：同上 No. 12A, 昭44.3.
- 3) Rice & Beer: Jour. Acoust. Soc. Amr. Vol. 39, 1966.
- 4) Wax: Selected Papers on Noise & ..., Dover, 1954.