

不規則外力を受ける基礎構造物の過渡応答

京都大学工学部 正員 後藤尚男
京都大学防災研究所 正員 土岐憲三
京都大学工学部 正員 〇秋吉 卓

1. まえがき 構造物とそれを支持する地盤の振動特性については、かなり詳細に検討が行なわれてきたが^(1,2) これらの研究はそのほとんどが周波数応答を解析するところまでであって、これはフーリエ変換形あるいは周波数伝達関数を求めることにはかならなかった。しかるに、突地震動のように不規則に変動する入力に対しての地盤あるいは構造物の応答を解析的に表現するためには、それらの単位衝撃応答関数が必要となってくる。ところで単位衝撃応答関数は伝達関数のラプラス逆変換によって得られるが、実際はそれが周波数の複雑な関数となっているため逆変換は容易ではない。そこでわれわれはすでに報告した弾性地盤中の剛な橋脚柱の周波数応答解析結果を参照して、表層地盤の動的効果を若干加味した式で置き換えを行なうことにより、単位衝撃応答関数の解析的表現を得た。本研究においては、基礎よりの入力地震動を定常不規則振動としてホワイトノイズを対象にし、これに対する系の不規則応答について解析を行なったので、その概略をここに報告する。

2. モデル化およびその理論解析 弾性地盤中に埋設された基礎構造物が剛な橋脚柱であって、その底面は堅い基礎に支えられ、回転の中心と底面の中心に持つローリング振動をするとき、その回転角に関する周波数伝達関数 $\Psi(\omega)$ は次式として得られている。³⁾

$$\Psi(\omega) = \frac{\frac{H_0}{I_0} + \frac{\pi(\omega_0)^2}{2H(\omega_0)} \chi G(\omega)}{-\omega^2 + 2i\zeta_0\omega_0\omega + \omega_0^2} \chi F(\omega) \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $F(\omega) = f_1 + if_2$, $G(\omega) = g_1 + ig_2$ はそれぞれ複素ばね効果および振動土圧の動的効果を示す項であって、それらの理論解析の結果が図-1および図-2に示されるものである。

本研究においては、側圧のばね効果と粘性減衰効果を持つた、振動数に無関係な量として定義し、次の関数形を与える。

$$F(\omega) = f_1 + if_2 = k_1 + 2i\zeta_1\omega/\omega_1 \quad \text{----- (2)}$$

一方、振動土圧の動的効果は図-2から見られるように、ある1自由度系の応答特性に近似できよう。かくして、 $G(\omega)$ の関数形として次の形を与える。

$$G(\omega) = g_1 + ig_2 = k_2\omega_2^2 / (-\omega^2 + 2i\zeta_2\omega_2\omega + \omega_2^2) \quad \text{----- (3)}$$

ところで、任意の時刻 $t(t \geq 0)$ における基礎構造物頂部の相対変位を $x(t)$ とすると、これに対する単位衝撃応答関数 $w(t)$ は式(2),(3)を利用して、 $H \cdot \Psi(\omega)$ のラプラス逆変換によって得られる。

$$\text{そこで } \alpha / \{-\omega^2 + 2i\zeta_2\omega_2\omega + \omega_2^2\} \chi F(\omega) \} = P(\omega) \text{ および}$$

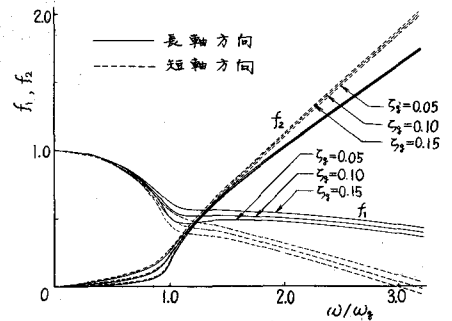


図-1 表層の複素ばね効果

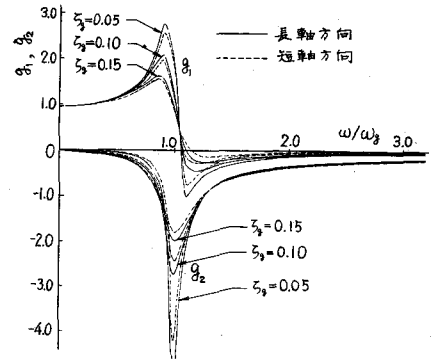


図-2 振動土圧の動的効果

$\beta \chi G(i\omega) / \{[-\omega^2 + 2i\zeta_5 \omega_5 \omega + \omega_5^2] \chi F(i\omega) \{ -\omega^2 + 2i\zeta_3 \omega_3 \omega + \omega_3^2 \} \} = Q(i\omega)$ と置いて, $P(i\omega), Q(i\omega)$ および $G(i\omega)$ のラプラス逆変換形をそれぞれ $w_0(t), w_1(t)$ および $w_2(t)$ とするとき, 基礎床振動に関する運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x}(t) + 2\Delta_1 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \alpha \ddot{z}(t) + \beta w_2(t) * \ddot{z}(t) = [\alpha + \beta w_2(t)] * \ddot{z}(t) \quad \text{----- (4)}$$

したがって式(4)より時刻 t_1, t_2 ($t_2 \geq t_1 \geq 0$) に関して次の2式をうる。

$$\nabla_{\omega}^2 \phi_{xx}(t_1, t_2) = [\alpha + \beta w_2(t_2)] * \phi_{zz}(t_1, t_2), \quad \nabla_{\omega}^2 \phi_{zx}(t_1, t_2) = [\alpha + \beta w_2(t_1)] * \phi_{zx}(t_1, t_2) \quad \text{----- (5)}$$

ここに $\nabla_{\omega}^2 = \partial^2 / \partial t_1^2 + 2\Delta_1 \partial / \partial t_1 + \omega_0^2$, ($i=1, 2$) であって, $A(t) * B(t)$ は convolution $\int_0^t A(t-\tau) B(\tau) d\tau$ を表すものとする。式(5)の第1式および第2式よりそれぞれ次の共分散 $\phi_{zz}(t_1, t_2), \phi_{zx}(t_1, t_2)$ をうる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{zz}(t_1, t_2) &= w(t_2) * \phi_{zz}(t_1, t_2) \\ \phi_{zx}(t_1, t_2) &= w(t_1) * \phi_{zx}(t_1, t_2) = w(t_1) * [w(t_2) * \phi_{zz}(t_1, t_2)] \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

ここで入力地震動 $\ddot{z}(t)$ は平均値0の定常確率過程として, 単位時間当りのパワーが D であるようなホワイトノイズを考えると, 入力地震動の共分散 $\phi_{zz}(t_1, t_2)$ は結局 $D \delta(t_2 - t_1)$ で表わされる。したがって, 式(6)より $\phi_{zx}(t_1, t_2)$ の結果を利用して $\phi_{xx}(t_1, t_2)$ が得られるが, この過程において表層と基礎の静的反力比 χ の値のいかんによって次の二つの場合が生ずる。

a) $1 + \chi k_1 - (\zeta_5 + \chi k_2 \omega_5 / \omega_g)^2 \geq 0$ のとき

$$w(t) = \alpha w_0(t) + \beta w_1(t) = \frac{\alpha}{\omega_1} e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{\beta k_3 \omega_g}{\zeta_g^* \omega_1} \frac{\omega_2 e^{-\Delta_1 t} \sin(\omega_1 t - \delta_1) + \omega_1 e^{-\Delta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)}{[(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2] \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \}^{1/2}}, \quad (t \geq 0) \quad \text{--- (7)}$$

ただし, $t < 0$ に対しては $w(t) = 0$ とする。このとき共分散 $\phi_{xx}(t_1, t_2)$ は式(6)より次式をうる。

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t_1, t_2) &= \lambda_{11} [e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \{ \Delta_1 \omega_1 \sin \omega_1(t_2-t_1) + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_2-t_1) \} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \{ \Delta_1 \omega_1 \sin \omega_1(t_1+t_2) + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_1+t_2) + 2\Delta_1^2 \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_1 t_2 \\ &\quad + \lambda_{12} [e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \{ \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \{ \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) - \delta_1) + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_1+t_2) - \delta_1) + 2\Delta_1^2 \sin \omega_1 t_1 \\ &\quad \cdot \sin(\omega_1 t_2 - \delta_1) \}] + \lambda_{13} [e^{-\Delta_2(t_2-t_1)} \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_1 + \varepsilon_1) - e^{-(\Delta_2 t_2 + \Delta_1 t_1)} \{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_1 t_1 + \varepsilon_2) \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2) + \omega_2 \sin(\omega_1 t_1 + \varepsilon_3) \\ &\quad \cdot \cos(\omega_2 t_2 + \delta_2) \}] + \lambda_{21} [e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \{ -2\Delta_1^2 \sin \omega_1(t_2-t_1) \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) + \delta_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \{ 2\Delta_1^2 \\ &\quad \cdot \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin \omega_1 t_2 + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) + \delta_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) - \delta_1) \}] + \lambda_{22} [e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \{ \omega_2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) + \varepsilon_3) \cos \delta_2 + \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \\ &\quad \cdot \sin(\omega_1(t_2-t_1) + \varepsilon_2) \sin \delta_2 \} - e^{-(\Delta_1 t_2 + \Delta_2 t_1)} \{ \omega_1 \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \varepsilon_1) \cos \omega_1 t_2 + \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \varepsilon_2) \sin \omega_1 t_2 \}] + \lambda_{23} [e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \\ &\quad \cdot \{ -2\Delta_1^2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) + \delta_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \{ 2\Delta_1^2 \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin(\omega_1 t_2 - \delta_1) + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) \\ &\quad + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) - \delta_1) \}] + \lambda_{24} [e^{-\Delta_2(t_2-t_1)} \{ -\sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2 + \varepsilon_2) \sin \delta_1 + \omega_1 \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2 + \varepsilon_1) \cos \delta_1 \} - e^{-(\Delta_1 t_2 + \Delta_2 t_1)} \\ &\quad \cdot \{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2 + \varepsilon_2) + \omega_1 \cos(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2 + \varepsilon_1) \}] + e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin \delta_2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1 + \varepsilon_2) \\ &\quad + \omega_2 \cos \delta_2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1 + \varepsilon_3) \} - e^{-(\Delta_1 t_2 + \Delta_2 t_1)} \{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \varepsilon_2) \sin(\omega_1 t_2 - \delta_1) + \omega_1 \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \varepsilon_1) \cos(\omega_1 t_2 - \delta_1) \}] \end{aligned} \quad \text{----- (8)}$$

ここに, $\lambda_{11} = \alpha^2 D / \{ 4\Delta_1 \omega_1^2 (\Delta_1^2 + \omega_1^2) \}$, $\lambda_{12} = \alpha \beta k_3 \omega_g^2 D / [\{ 4\Delta_1 \omega_1^2 \zeta_g^* (\Delta_1^2 + \omega_1^2) \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \}]^{1/2}]$, $\lambda_{13} = \alpha \beta k_3 \omega_g D / [\omega_1^2 \{ \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \} \}]^{1/2}]$, $\lambda_{21} = \lambda_{12}$, $\lambda_{22} = \lambda_{13}$, $\lambda_{23} = \beta^2 k_3^2 \omega_g^2 D / [4\Delta_1 \omega_1^2 (\Delta_1^2 + \omega_1^2) \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \}]$, $\lambda_{24} = \beta^2 k_3^2 \omega_g^2 D / [\omega_1^2 \zeta_g^* \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \} \{ \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \cdot \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \} \}]^{1/2}]$, $\lambda_{25} = \beta^2 k_3^2 \omega_g^2 D / [\zeta_g^* \omega_g^2 \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2 \} \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \}]$, $\delta_1 = \tan^{-1} [2\Delta_1 \omega_1 (\Delta_2 - \Delta_1) / \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2 \}]$, $\delta_2 = \tan^{-1} [2\Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) / \{ (\Delta_2 - \Delta_1)^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2 \}]$, $\varepsilon_1 = \tan^{-1} [2\Delta_2 (\Delta_2 + \Delta_1) / \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2 \}]$, $\varepsilon_2 = \tan^{-1} [\omega_1 \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2 \} / \{ (\Delta_2 + \Delta_1) \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2 \} \}]$, $\varepsilon_3 = \tan^{-1} [2\omega_1 (\Delta_2 + \Delta_1) / \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2 \}]$, $\varepsilon_4 = \tan^{-1} [\omega_2 \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2 \} / \{ (\Delta_2 + \Delta_1) \{ (\Delta_2 + \Delta_1)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2 \} \}]$, $\alpha = (H/\omega_0)^2 / 2$, $\beta = \pi \chi (\omega_5 / \omega_g)^2 / 2$, $\Delta_1 = \omega_5 (\zeta_5 + \chi k_2 \omega_5 / \omega_g)$, $\omega_0 = \omega_5 \sqrt{1 + \chi k_1}$, $\omega_1 = \omega_g \sqrt{1 + \chi k_1 - (\Delta_1 / \omega_5)^2}$, $\Delta_2 = \zeta_g \omega_g$, $\omega_2 = \zeta_g^* \omega_g$, $\zeta_g^* = \sqrt{1 - \zeta_g^2}$.

ω_g, ω_s : 表層1次および基礎体のロッキングの固有円振動数, ζ_g, ζ_s : 表層内部および基礎体のロッキングの粘性減衰定数.

b) $1 + \chi k_1 - (\zeta_s + \chi k_2 \omega_s / \omega_g)^2 < 0$ のとき

$$w(t) = \alpha w_0(t) + \beta w_1(t) = \frac{\alpha}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t + \frac{\beta \omega_s \omega_g e^{-\delta_3 t} \sin(\omega_s t - \delta_3)}{\zeta_g^* \{ \{ (\omega_1 - \omega_s - \omega_1')^2 + \omega_1'^2 \} \{ (\omega_1 - \omega_s + \omega_1')^2 + \omega_1'^2 \} \}^{1/2}}, \quad (t \geq 0) \quad \text{----- (9)}$$

ここに, $\delta_3 = \tan^{-1} [2\omega_s(\omega_1 - \omega_s) / \{ (\omega_1 - \omega_s)^2 - \omega_1'^2 - \omega_s'^2 \}]$, $\omega_1' = \omega_s \sqrt{(\omega_1/\omega_s)^2 - (1 + \chi k_1)}$, $t < 0$ に対しては $w(t) = 0$ とする.

a) と同様にして共分散 $\phi_{xx}(t_1, t_2)$ 等が得られるが, ここでは割愛する.

かくして基礎的確率量である応答変位, 速度の分散 $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$, $\sigma_{\ddot{x}}^2(t)$, および相関係数 $\rho_{\ddot{x}\ddot{x}}(t)$ は共分散 $\phi_{xx}(t_1, t_2)$, $\phi_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2)$, $\phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2)$ 等を介して次のようにして求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \phi_{xx}(t_1, t_2), & \phi_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{xx}(t_1, t_2), \\ \sigma_{\ddot{x}}^2(t) &= \phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, t), & \sigma_{\dot{x}}^2(t) &= \phi_{\dot{x}\dot{x}}(t, t), & \rho_{\ddot{x}\ddot{x}}(t) &= \phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, t) / [\sigma_{\ddot{x}}(t) \sigma_{\ddot{x}}(t)] \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (10)}$$

ところで応答量 $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ がガウス分布に準うとすると, $|x(t)|$ がレベル A を単位時間当りに超過する平均超過回数 $m(A; t)$ は2次元同時確率密度関数 $P(x, \dot{x}; t)$ を用いて次の式で与えられる⁴⁾

$$\begin{aligned} m(A; t) dt &= \int_{A - \dot{x}(t) dt}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{A - \dot{x}(t) dt} P(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x} = 2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} P(A, \dot{x}; t) d\dot{x} \\ \therefore m(A; t) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{\sigma_x} \right)^2 \right\} \left[\sqrt{1 - \rho_{\dot{x}\dot{x}}} \exp \left\{ -\frac{\rho_{\dot{x}\dot{x}}}{2(1 - \rho_{\dot{x}\dot{x}})} \left(\frac{A}{\sigma_x} \right)^2 \right\} + \sqrt{\frac{\rho_{\dot{x}\dot{x}}}{2(1 - \rho_{\dot{x}\dot{x}})}} \left(\frac{A}{\sigma_x} \right) \right] \quad \text{----- (11)} \end{aligned}$$

3. 数値計算結果とその考察 $k_1 = 2k_2 = k_3 = 1$ とし, $b/a = A/H = 1/2$ の剛直橋円柱の場合に対する計算結果について図-3より図-10までに示した. 橋円柱は振動の方向によって固有振動数が異なるため, 本研究においては主として短軸および長軸方向に振動するときの橋円柱の固有振動数と表層のそれとの相対的な関係が, その過渡応答に及ぼす影響を検討した. 図-3~図-6および図-7~図-10はそれぞれ短軸方向($\omega_s < \omega_g$)および長軸方向($\omega_s > \omega_g$)の振動についての図である. 図-3と図-7の単位衝撃応答関数と比較すると, $\omega_s < \omega_g$ では表層地盤の影響が非常に大きく効いてくるが, $\omega_s > \omega_g$ では表層地盤の動的効果を加味した単位衝撃応答関数と, それを無視したときの関数との位相差からくる遅延効果により, ほぼ表層の固有周期 T_g に相当する時刻を経過する前後において過去の応答履歴の影響が急激に薄れるが, $2T_g$ を過ぎると表層地盤の影響が効いてくることになる. 図-4と図-8は応答変位の分散を明示したものである. 表層の影響を考慮しない場合を点線を示したが, $\omega_s < \omega_g$ では傾向的にはこれと類似しており, 応答が定常状態に達するまでかなりの時間を要するが, 一方, $\omega_s > \omega_g$ では $\zeta_s \neq 0$ のときは最初の T_g 時間で過渡応答の大半が完了することを示している. これらの傾向は図-5と図-9の相関係数についても数値的に示されているように, やはり $\omega_s > \omega_g$ では疑似停滯状態が存在する. さらに応答変位があるレベルを単位時間当りに超過する平均回数を図-6と図-10に示したが, 入力地震動が定常白色過程であることから当然のことながら, いずれの場合も橋造物の運動開始とほとんど同時に低レベルほど超過回数が急激な増大を示し, すぐさま定常状態に近づくが, 超過レベルが大きくなると過渡状態は長引く. また例えば図-4, 8 の $\zeta_g = 0.05$ のときの分散の差からして, A/σ_x が等しくなるのは超過レベル $A\sqrt{\omega_g/D}$ が図-6で1.5, 図-10で0.5の場合に相当するが, $\omega_s > \omega_g$ の方が $m(A; t)$ は若干大きい. これは ω_s と ω_g の相対関係が超過頻度に対する影響を与えることの一例であらう.

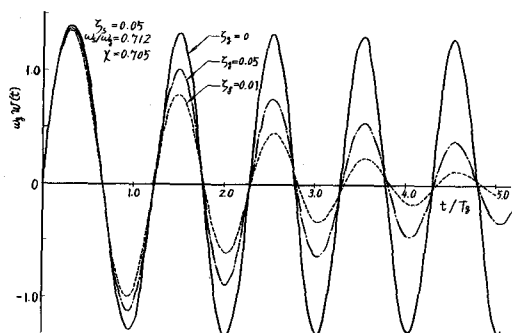


図-3 単位衝撃応答関数

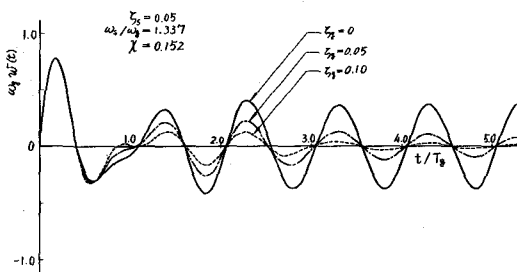


図-7 単位衝撃応答関数

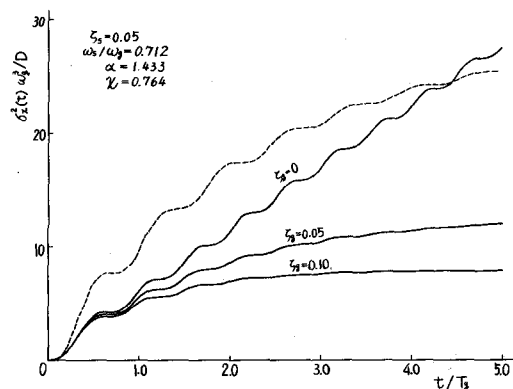


図-4 変位の分散

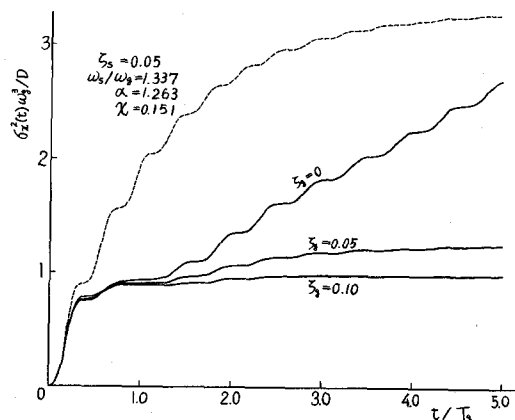


図-8 変位の分散

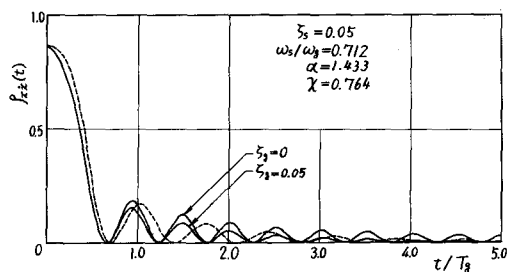


図-5 相関係数(変位-速度)

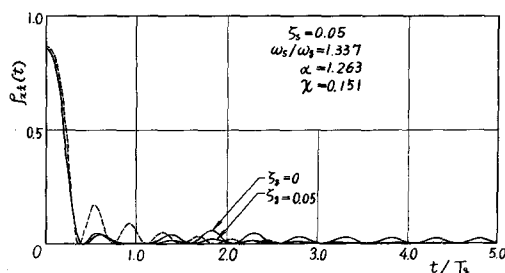


図-9 相関係数(変位-速度)

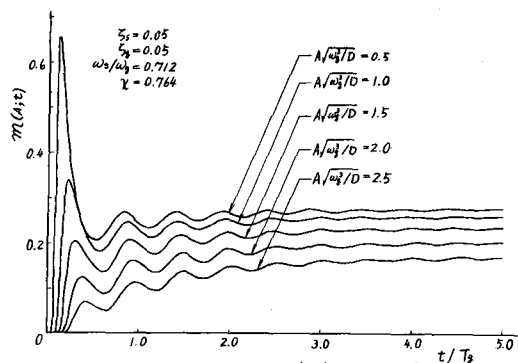


図-6 平均超過回数(単位時間)

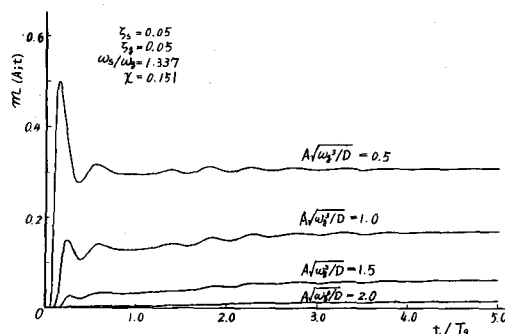


図-10 平均超過回数(単位時間)

- 1) 田治見 忠: 日本地震工学シンポジウム(1966)講演集, 1966. 10, pp 255-260. 2) 篠藤 幸三: 昭和44年度西日本学術講演会講演概要, I23. 3) 篠藤 幸三: 京大防災研究所年報第11号A, pp 255-274. 4) S. O. Rice: Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, pp 189-195, Dover.