曲げ振動系の非線型応答

東京都立大学大学院　学生員　國井隆弘

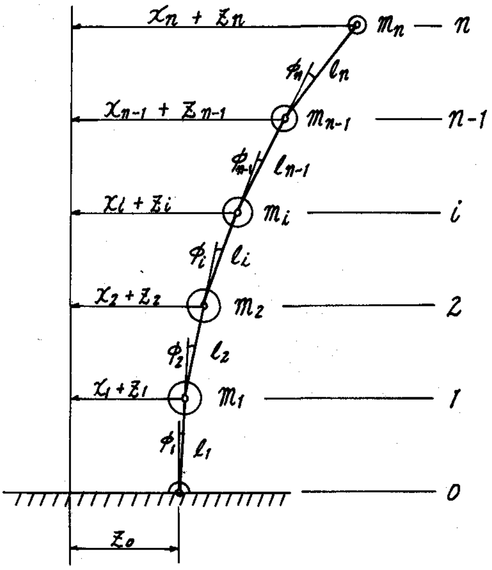
1. まえがき

強振時における構造物の非線型振動問題を特に復元力の弾塑性について研究したものは数多い。しかしながらこの場合、もし構造物を集中質点とバネ（質点法）という振動系に理想化して解析しようと試みる時、ビル構造物等のセン断振動系については比較的容易に運動方程式が立てられるが高橋脚、煙突等の振動が曲げに支配される曲げ振動系に於いては運動方程式が簡単には立てられない。その理由は復元力機構がセン断振動系では隣接する質点間のみの相対変位に依存するのに比べて、曲げ振動系では隣接しない質点の変位が復元力を支配することがあり得るためと思われる。このため曲げ振動系の多質点系の地震応答計算によく用いられる影響係数マトリックスとか、剛さマトリックスの要素（たとえば δ_{ij} とか k_{ij}）に非線型特性を挿入することは非常に困難であり、この方法での研究は筆者の知る限りではほとんど見あたらない。

この研究では曲げ振動系の構造物を、質量を持ちしかも受けた曲げモーメントに或る特性を持って回転するヒンジと、質量がなく曲げモーメントを伝達する剛棒、との二種の構造から構成される系と理想化して、ヒンジの回転が任意の非線型特性を表現できるものと考え運動方程式を立ててみた。この方程式の解法としては、地震応答解析に多く用いられるモーダルアナリシスの利用を試みた。

2. 運動方程式

図－1の如く構造物を質量、ヒンジ、剛棒と三つの構造で理想化する。この場合構造物の質量はヒンジに付着しているか或いはヒンジ自体が相当する質量を有すると考えてもよい。ヒンジの回転が実際の構造物の変位を近似的に（折れ線で）表わせればよいわけだが、ここでは曲げモーメント（M）とヒンジの回転した角度（ϕ）とに相関関係を持たせる方法を試みた。すなわち、図－2の如く構造が線型を保つ限界を曲げモーメントで表示してM_yとする、そして非線型範囲（AB）に入ったときはそのM－ϕ関係を実際の非線型特性に合致させる。



図－1　振動モデル

図－1に対応して運動方程式は減衰項を省略すれば

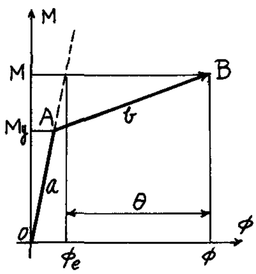
$$[m]\{\ddot{x}\} + \{P\} = -[m]\{\ddot{z}\} \qquad (1)$$

ここで[ ]は正方マトリックス、{ }は一列マトリックスを表わし、[m]は対角マトリックス、Pは復元力、zは地動変位、xは構造物の相対変位を表わすものとする。

図−2から　$\phi = \phi_e + \theta$ ——— (2)

$\theta = R(M - M_y)$ 　($M \leq M_y$ では $\theta = 0$) ——— (3)

$R = (a - b)/a \cdot b$ ——— (4)



図−2　M−φ 関係

図−1と式(2)とから変位 x と回転角 ϕ との関係が次式で得られる

$$\{x\} = [\ell]\{\phi\} = \{y\} + [\ell]\{\theta\} \quad \text{——— (5)}$$

ここで　$\{y\} = [\ell]\{\phi_e\}$ ——— (6)

$$[\ell] = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 & - \\ \ell_1 + \ell_2 & \ell_2 & 0 & - \\ \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 & \ell_2 + \ell_3 & \ell_3 & - \\ - - - & - - - & - - - & - \end{bmatrix} \quad \text{——— (7)}$$

一方曲げモーメントMと復元力Pと回転角 ϕ_e との間には次の関係がある。

$$\{\phi_e\} = [1/a]\{M\} = [1/a][\ell]^T\{P\} \quad \text{——— (8)}$$

ここで $[1/a]$ は対角マトリックス、$[\ell]^T$ は $[\ell]$ の転置マトリックス。式(8)を式(6)に代入して

$$\{y\} = [\ell][1/a][\ell]^T\{P\} \quad \text{——— (9)}$$

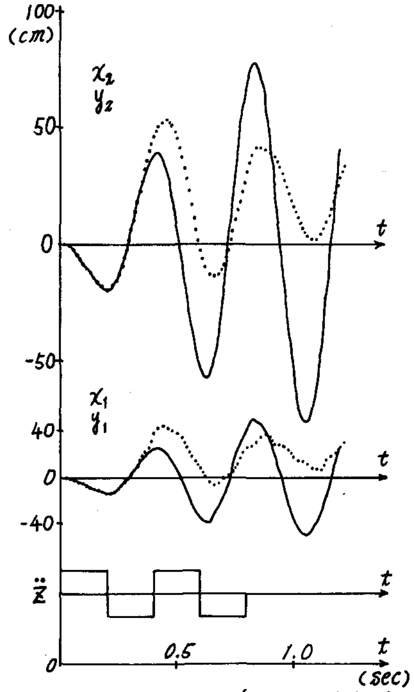
ところで影響係数マトリックス $[\delta]$ は

$$[\delta] = [\ell][1/a][\ell]^T \quad \text{——— (10)}$$

で与えられるので式(9)は復元力を表わす式として次式となる。　$\{P\} = [\delta]^{-1}\{y\} = [k]\{y\}$ ——— (11)

式(5)と式(11)を式(1)に代入して整理すれば、非線型運動方程式が得られる。

$$\{m\}\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = -[m]\{\ddot{z}\} - [m][\ell]\{\ddot{\theta}\} \quad (12)$$



図−3 応答変位　—— y (線型)　…… x (非線型)

3. 数値計算例

簡単な数値計算を2質点系で行った。鋼棒(断面 1.0×1.0 長さ 180^{cm})の下端固定、上端自由の柱の基礎に一次振動に共振する矩形波加速度を与え、R=1000 と仮定して応答量を求めた結果が図−3に示してある。計算方法はモーダルアナリシスを利用して、積分計算は差分計算(1/1000秒)で行い、式(12)の $\{\ddot{\theta}\}$ については試算方法(1/1000)に従った。利用した計算機は東京大学大型電子計算機である。

4. 考察

曲げ振動系の復元力の非線型性に伴う弾塑性振動を質量を有するヒンジ(回転は曲げモーメントの関数で与えられる)と質量のない剛棒とからなる振動モデルを用いて解析した。その結果、式(7)のマトリックスと式(2)の性質から式(12)のような外力項に非線型要素の入った方程式となり、モーダルアナリシスを利用して比較的簡単に解くことができた。

この研究を進めるにあたり、始終懇切なご指導をいただいた奥田秋夫教授に深く感謝するとともに、多大な援助を下さった谷島恒男助手と山本一之芝浦工大助手に心から感謝します。