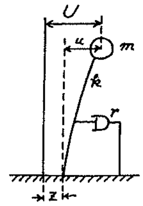
地盤の影響を考慮した1自由度系の振動について

鉄道技術研究所　　正員　　小林芳正

序．建物と地盤の相互作用の重要性は早くから注目され，1936年のE.Reissnerのものをはじめ鳥海，田治見，佐藤・山口らによる多くの研究がある。さらに金井はこれを実証する研究を最近発表している。これらによれば“自由な”地表における地震波観測結果をそのまま建物への入力とすることは不適当であることが明らかとなってきている。

ここでは前記の諸研究におけるよりも簡単なやり方でこの問題を扱う。



第1図

1．普通の応答計算

地盤の下方から地震波が入射し，地表（建物基礎）の運動が $z(t)$ なるとき1自由度系の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{u} + r\dot{u} + ku &= -m\ddot{z} \\ \text{または}\quad \ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + n^2 u &= -\ddot{z} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$z(t)$ が t の任意関数であるときにはこの系の単位衝撃応答（unit impulse response）$h(t)$ を求めて $z(t)$ に対する応答（response）は

$$u(t) = -\int_0^t \ddot{z}(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

となる。絶対変位 $U = u + z$ に関する単位衝撃応答を求めるには (1) において $z = e^{ipt}$ とし

$$U = u + z = \frac{n^2 + i\,2\varepsilon p}{-p^2 + n^2 + i\,2\varepsilon p}\cdot e^{ipt} \qquad (3)$$

これに $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp$ をほどこせば $z \to \delta(t)$ となるから $U \to h(t)$ となる。

1）$\varepsilon < n$ のとき（減衰小のとき）$\beta = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$，$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon\beta}{n^2 - 2\varepsilon^2}\right)$ とすれば

$$h(t) = e^{-\varepsilon t}\cdot\frac{n^2}{\beta}\sin(\beta t + \delta) \qquad (4)$$

2）$\varepsilon > n$ のとき（減衰大のとき）$\beta = \sqrt{\varepsilon^2 - n^2}$ とすれば

$$h(t) = e^{-\varepsilon t}\cdot\frac{(n^2 - 2\varepsilon^2)\sinh\beta t + 2\varepsilon\beta\cosh\beta t}{\beta} \qquad (5)$$

ここに得られた $h(t)$ を (2) に入れれば U に関する応答が求まる。$z(t)$ としては自由なる地表の変位がもちいられる。

2．波を考える応答計算

構造物の内部摩擦を無視し地盤に入射波 W_1 と反射波 W_2 を考えると

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{U} + ku &= 0 \\ \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

これを境界条件；$x = 0$ で $ku = \mu a\frac{\partial W}{\partial x}$，$u = W = W_1 + W_2$ を考慮して解く。ただし U，u は前と同じ，ρ，μ は地盤の密度，剛性，W は地盤の変位，a は建物の底面積。

入射波が $W_1 = Ae^{i(pt - fx)}$ のとき

$$U = \frac{2Ak}{k - mp^2 + i\frac{mkp^2}{\mu a f}} e^{ipt} \qquad (7)$$

1) $k/m > k^2/4a^2\rho\mu$ のとき(減衰小のとき) $\alpha = k/2a\sqrt{\rho\mu}$, $\beta = \sqrt{k/m - k^2/4a^2\rho\mu}$ とし

$$h(t) = e^{-\alpha t}\frac{k}{m\beta}\sin\beta t \qquad (8)$$

2) $k/m < k^2/4a^2\rho\mu$ のとき(減衰大のとき) $\alpha = k/2a\sqrt{\rho\mu}$, $\beta = \sqrt{k^2/4a^2\rho\mu - k/m}$ とし

$$h(t) = e^{-\alpha t}\frac{k}{m\beta}\sinh\beta t \qquad (9)$$

ここに得られた $h(t)$ を (2) に入れれば U に関する応答が求まる。ここでも $z(t)$ としては自由なる地表の変位がもちいられる。

3. 振動試験

普通のモデルを考えれば fp^2e^{ipt} なる強制力を与える振動試験は

$$m\ddot{u} + r\dot{u} + ku = fp^2 e^{ipt}$$

よって

$$u = \frac{fp^2}{m\sqrt{(-p^2+n^2)^2+4\varepsilon^2p^2}}\sin(pt+\delta) = \frac{f}{m\sqrt{(-1+u^2)^2+4h'^2u^2}}\sin(pt+\delta) \qquad (10)$$

ただし $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{-p^2+n^2}{2\varepsilon p}\right)$, $n^2 = k/m$, $2\varepsilon = r/m$, $h' = \varepsilon/n$, $u = n/p$

一方,波を考慮すれば

$$U = \frac{fp\sqrt{p^2+k^2/\rho\mu a^2}}{m\sqrt{(-p^2+n^2)^2+k^2p^2/\rho\mu a^2}}\sin(pt+\delta) = \frac{f}{m}\sqrt{\frac{1+h^2u^2}{(-1+u^2)^2+4h^2u^2}}\sin(pt+\delta) \qquad (11)$$

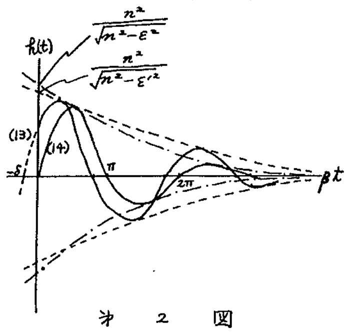
ただし $\delta = \tan^{-1}\{\sqrt{\rho\mu}\, map(-p^2+n^2-k^2/\rho\mu a^2)/k^2\}$, $n^2 = k/m$, $k^2/4\rho\mu a^2 = \varepsilon^2$, $h = \varepsilon/n$, $u = n/p$

減衰が小の場合についてのみしらべると,ピークの位置は比較的違わないが曲線の形は違っている。この違いは (10) を与えるモデルに従うなら h' にしわよせしてよみとらざるを得ない。すなわち

$$\frac{1}{(-1+u^2)^2+4h'^2u^2} = \frac{1+h^2u^2}{(-1+u^2)^2+4h^2u^2} \qquad (12)$$

により, $u \fallingdotseq 1$ として

$$h'^2 = \frac{h^2}{1+h^2} \qquad よって \quad h'^2 < h^2 \quad または \quad \varepsilon' < \varepsilon$$



第 2 図

4. 考察

減衰が小の場合のみについて,普通の応答計算では

$$h(t) = e^{-\varepsilon' t}\frac{n^2}{\sqrt{n^2-\varepsilon'^2}}\sin\left(\sqrt{n^2-\varepsilon'^2}\,t+\delta\right) \quad ただし \ \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon'\sqrt{n^2-\varepsilon'^2}}{n^2-2\varepsilon'^2}\right) \qquad (13)$$

波を考慮する応答計算では

$$h(t) = e^{-\varepsilon t}\frac{n^2}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}\sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\cdot t \qquad (14)$$

これらをくらべると (13) の方が位相が進んでいるほか減衰が過小にみつもられている。これらの傾向は減衰が大なるほどいちじるしい。

また原因不明(?)の粘性減衰 ε' に対して波を考える方法では

$$\varepsilon = k^2/4\rho\mu a^2 = 建物の剛性率/4\times(地盤の音響インピーダンス)^2$$

なる人工的に制御可能な減衰の実体的概念が得られる。