# 鉄道橋の衝撃率計算

鉄道技術研究所　正員　大地羊三

## 1. 計算式

橋桁のたわみをFourier級数に展開して、橋桁の運動エネルギー、歪エネルギー，減衰関数を求め、これらをLagrangeの運動方程式に代入し、その第一項を取り出す。この様にして橋桁のresponceを求める微分方程式を誘導すると，次の三式が得られる.

$$\frac{M_b}{2}\ddot{y} + C_b\dot{y} + K_b y = R\sin\omega t \quad \text{------}(1)$$

$$M_s\ddot{z} + C_s\dot{z} + K_s z = -M_s\ddot{y}\sin\omega t \quad \text{------}(2)$$

$$R = (M_u+M_s)g - M_u\ddot{y}\sin\omega t + K_s z + \sum_h P_h \sin(\omega_h t+\varepsilon_h) \quad \text{------}(3)$$

但し　$y$ = 橋桁中央点のたわみ　　$z$ = 車輌のバネの縮み

$M_b$ = 橋桁の全質量　　$M_s$ = 車輌のバネ上質量

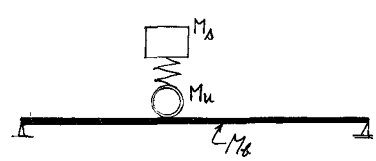
$C_b$ = 橋桁の減衰係数 $= 2h_b\omega_b\frac{M_b}{2}$　　$C_s$ = 車輌のバネの減衰係数 $= 2h_s\omega_s M_s$

$K_b$ = 橋桁のバネ係数 $= \frac{\pi^2}{2}\frac{EI}{\ell^3}$　　$K_s$ = 車輌のバネのバネ係数

$P_h$, $\omega_h$, $\varepsilon_h$ = Hummer Blow 其他の週期力の振巾、円振動数および位相差

$\omega = \pi V/\ell$　（$V$ = 車輌の直行速度，$\ell$ = 橋桁の支間）

$M_u$ = 車輌のバネ下質量




(1)，(2)，(3)式を連立させて解いた結果は、かなり複雑なもので一般的傾向をつかむには不便なものであった。我々には最大値が必要なのであるから，この観点に立って解を整理し、衝撃係数を求める公式として、次式を誘導した。

$$i = \left(\frac{y-y_{st}}{y_{st}}\right)_{max} = K_a\frac{\dot{w}}{w_b''} + K_b\frac{P_h}{(M_u+M_s)g} + K_c\frac{z_0}{z_{st}} \quad \text{------}(4)$$

但し　$y_{st} = \frac{2(M_u+M_s)g}{w_b}$　　$z_{st} = \frac{g}{w_s^2}$

$w_b$ = 橋桁の無載荷時円固有振動数　$w_b''$ = 橋桁の載荷時円固有振動数

$w_s$ = 車輌のバネの円固有振動数　　$z_0$ = 一般軌道上における車輌振動振巾

(4)式の右辺の各項は夫々Zimmermann効果，Hummer Blow等の週期力の影響，一般軌道の凹陸による車輌振動の影響を表わしている。第三項は今まで殆んど注目されていなかったものであるが，実測の結果によると，他の項と同じ程度の大きさを持ち無視出来ないものである事が解った。$K_a$，$K_b$，$K_c$は夫々の係数である。20〜30m以下の橋桁を100 km/hr 以下の速度で車輌が直行する場合であれば，実用的には

$$K_a = 1, \quad K_b = 1$$

$$K_e = \frac{M_s}{M_u+M_s}\sqrt{2 \Big/ \left(1-2\frac{M_b+2M_u-2M_s}{M_b+2M_u+2M_s}\left(\frac{\omega_s}{\omega_b''}\right)^2-\left(\frac{\omega_s}{\omega_b''}\right)^4\right)} \quad \text{------ (5)}$$

とする事が出来る。橋桁が20～30m以上になると、$K_b$が大きくなり、車輌の通行速度が100 Km/hr 以上になると$K_a$が変化する。更にくわしい事はここでは割愛する。

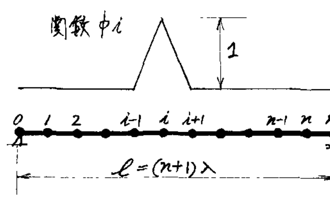
2. 計算式の MATRIX による表示

(1)式は単純桁を対象にして誘導したものである。したがつて橋梁形式が変つた場合は、Lagrangeの運動方程式にもどつて、式の誘導をしなおさなければならない。たとえ誘導が出来たとしても、これを解く手間は大変なものである。そこで橋梁形式には無関係な，(1)、(2)、(3)式に変る計算式を誘導する事を考えた。結果は次の如くである。

$$[M_b](\ddot{y})+[C_b](\dot{y})+[K_b](y)=(\phi)R \quad \text{------ (6)}$$

$$M_s\ddot{z}+C_s\dot{z}+K_s z=-M_s(\bar{\phi})(\ddot{y}) \quad \text{----- (7)}$$

$$R=(M_u+M_s)g-M_u(\bar{\phi})(\ddot{y})+K_s z+\sum_k P_k \sin(\omega_k t+\varepsilon_k) \quad (8)$$




但し $(y)$, $(\dot{y})$, $(\ddot{y})$ = 各質点でのたわみ$y_i$およびその時間に関する微分係数$\dot{y}_i$, $\ddot{y}_i$をたてに並べた列ベクトル

$[M_b]$ = 各分割点に集中した，橋桁の質量$M_{bi}$を対角線上に並べた対角行列

$[C_b]$ = 質点$i$に対する減衰係数$C_{bi}$を対角線上に並べた対角行列

$[K_b]$ = rigidity matrix（たわみの影響線行列の逆行列）

$(\phi)$, $(\bar{\phi})$ = 次に示す関数$\phi_i$をたて又はよこに並べた列ベクトルおよび行ベクトル

$$\phi_i=\begin{cases} 0 & (0 \leq t/T \leq i-1) \\ (n+1)t/T-(i-1) & (i-1 < \;''\; \leq i) \\ (i+1)-(n+1)t/T & (i < \;''\; \leq i+1) \\ 0 & (i+1 < \;''\; \leq n+1) \end{cases}$$

但し $T = l/(n+1)v$ = 車輌が1 segmentを通過するに要する時間

其他の記号は(1)、(2)，(3)式の場合と同じである。

(6)式の$[K_b]$の形を適当に選ぶ事によつて、色々な形式の桁のresponceを求める事が出来る。単純桁，連続桁の場合についてはFleming 等の報告（Proc. ASCE 87-ST7）がある。筆者は(6)、(7)、(8)式を用いて衝撃係数を計算するためのプログラムを作り、電子計算機で各種形式の橋桁の衝撃係数を計算している。

地震荷重をうけたときの橋桁のresponceを計算する場合であれば，(6)式の右辺を次の如く地震に対応するものに変えればよい。この場合(7)、(8)式は不要である。

$$[M_b](\ddot{y})+[C_b](\dot{y})+[K_b](y)=(\phi')\ddot{u} \quad \text{--------------- (9)}$$