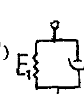
粘弾性体の振動

電力中央研究所　畑野　正

構造物の耐震問題を取扱うとき構造物及び基礎の材料力学的性質として弾性と流体粘性が併立した形を考えるのが一般である。鋼材料や土質材料からなる構造物について弾塑性的性質を加味する場合でも同じ取扱いが行われている。弾性と流体粘性の併立した形の力学的性質を考えること即ちKelvin模型を考えることは振動方程式の取扱を容易にする便があるが構造物の振動を本質的に説明するか否かは疑問である。耐震設計上最も重要な固有週期と振幅の絶体値は材料の弾性，振動減衰性を適確に想定しなければ正しく知ることは出来ず,最近のように長大構造物が建設され高次振動をも問題にする場合は特にこの知識が重要となつて来る。筆者はコンクリートの応力,ひずみ,時間の関係をMaxwell-Kelvin模型を想定すれば相当説明が出来ることを実験例について数回発表してきた。岩や土についてもこの様な説明が出来るのであるが,この場合はあまり大きくない応力状態でも非線型の取扱が必要となるであろう。然しこれはComputerの取扱い技術の問題に還元出来るのでこゝでは線型の範囲について述べることにする。以下一般に行われているKelvin模型を含めて,更に広範囲の粘弾性体の振動を考え,その特性を調べる為の手段として構造物耐震論の基礎になる一端固定他端自由角柱の単弦地動による強制曲げ振動を例にとつて論じよう。

1.　粘弾性体の応力とひずみの関係。粘弾性体の応力とひずみの関係は模型の種類に従つて周知のように次のように書ける。

種類	応力とひずみとの関係	$\frac{\sigma}{\varepsilon}=E_0$	模型
Maxwell-Kelvin Model	$\left(1+\frac{E_1}{E}+\frac{\eta_1}{\eta}\right)\sigma+\frac{\eta_1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{E_1}{\eta}\int_0^t\sigma dt=E_1\varepsilon+\eta_1\frac{d\varepsilon}{dt}$	$E_0=E\frac{p+\alpha}{p+\beta p^{-1}+\gamma}$ (1) $p=\frac{d}{dt},\ \beta=\frac{EE_1}{\eta\eta_1}$ $\alpha=\frac{E_1}{\eta_1},\ \gamma=\frac{E}{\eta_1}+\frac{E_1}{\eta_1}+\frac{E}{\eta}$	
3 elements Model	$\left(1+\frac{E_1}{E}\right)\sigma+\frac{\eta_1}{E}\frac{d\sigma}{dt}=E_1\varepsilon+\eta_1\frac{d\varepsilon}{dt}$	$E_0=E\frac{p+\alpha}{p+\gamma}$ (2) $\alpha=\frac{E_1}{\eta_1}$ $\gamma=\frac{E}{\eta_1}+\frac{E_1}{\eta_1}$	
Kelvin Model	$\sigma=E_1\varepsilon+\eta_1\frac{d\varepsilon}{dt}$	$E_0=E_1(1+\delta p)$ (3) $\delta=\frac{\eta_1}{E_1}$	
Maxwell Model	$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\eta}=\frac{d\varepsilon}{dt}$	$E_0=E\frac{p}{p+\gamma}$ (4) $\gamma=\frac{E}{\eta}$	
elastic Model	$\sigma=E\varepsilon$	$E_0=E$ (5)	

2.　単弦地動による曲げ振動の規準振動型による解。

振動方程式を一般的な応力とひずみの比E_0を用いて書くと(6)となる。

$$E_0I\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\rho A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\rho A}{g}\frac{d^2 g_0}{dt^2}\qquad(6)$$

境界条件は(7)となる。但しy:相対変位g_0:地動

$$\begin{aligned}x&=0\ \cdots\ y=0\quad \frac{dy}{dx}=0\\ x&=l\ \cdots\ \frac{d^2y}{dx^2}=0\quad \frac{d^3y}{dx^3}=0\end{aligned}\qquad(7)$$

(i) Maxwell-Kelvin body に対する解。

(6)に(1)を代入し$g_0=Z\sin\omega t$とし規準振動型$f_n(x)$を用い解けば

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)(a_n\sin\omega t+b_n\cos\omega t)\qquad(8)$$

但し $f_n(x)=A_n(\sin m_nx-\sinh m_nx)+(\cos m_nx-\cosh m_nx)$ (9)

$$\cos m_nl\cosh m_nl+1=0\quad(10)\qquad A_n=\frac{\sin m_nl-\sinh m_nl}{\cos m_nl+\cosh m_nl}\quad(11)$$

$$a_n=Z\omega^2\frac{\left(\omega-\frac{\beta}{\omega}\right)(Bm_n^4\omega-\omega^3+\omega\beta)+\gamma(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)}{(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)^2+(Bm_n^4\omega-\omega^3+\omega\beta)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\qquad(12)$$

$$b_n=Z\omega^2\frac{\left(\omega-\frac{\beta}{\omega}\right)(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)-\gamma(Bm_n^4\omega-\omega^3+\omega\beta)}{(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)^2+(Bm_n^4\omega-\omega^3+\omega\beta)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\qquad(13)$$

但し　$B=EIg/\rho A$

(ii) 3 elements Model に対する解。

$$a_n=Z\omega^2\cdot\frac{\omega(Bm_n^4\omega-\omega^3)+\gamma(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)}{(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)^2+(Bm_n^4\omega-\omega^3)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (14)$$

$$b_n=Z\omega^2\cdot\frac{\omega(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)-\gamma(Bm_n^4\omega-\omega^3)}{(Bm_n^4\alpha-\gamma\omega^2)+(Bm_n^4\omega-\omega^3)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (15)$$

(iii) Kelvin Model に対する解。

$$a_n=Z\omega^2\cdot\frac{(Bm_n^4-\omega^2)}{(Bm_n^4-\omega^2)^2+(B\delta m_n^4\omega)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (16)$$

$$b_n=Z\omega^2\cdot\frac{-B\delta m_n^4\omega}{(Bm_n^4-\omega^2)^2+(B\delta m_n^4\omega)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (17)$$

但し $B=EIg/\rho A$

(iv) Maxwell Model に対する解。

$$a_n=Z\omega^2\cdot\frac{\omega(Bm_n^4\omega-\omega^3)-\gamma^2\omega^2}{(\gamma\omega^2)^2+(Bm_n^4\omega-\omega^3)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (18)$$

$$b_n=Z\omega^2\cdot\frac{-\omega(\gamma\omega^2)-\gamma(Bm_n^4\omega-\omega^3)}{(\gamma\omega^2)^2+(Bm_n^4\omega-\omega^3)^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (19)$$

(V) elastic Model に対する解。

$$a_n=Z\omega^2\,\frac{1}{Bm_n^4-\omega^2}\cdot\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx} \quad (20)$$

$$b_n=0 \quad (21)$$

3. 解に対する考察。規準振動型による解はすべて地動加速度,共振係数,モード係数,の積により得られる。今r次の共振角振動数ω_{or}に於る共振振幅$y_{res.}$は近似的に地動と90°位相のことなる項のみを採り又(20)から$\omega_{or}^2\fallingdotseq Bm_n^4$として表の様に得られる。振動減衰の限界減衰に対する割合hをKelvin Modelについて導かれる$\frac{1}{2h}=y_{res.}/y_{st.}$(22)の関係が他にも適用されると仮定して粘弾性常数との関係を求めれば表のようになる。こゝに$y_{st.}$は一定地盤加速度が静的に作用したときの変位であり(20)を用いて

$$y_{st.}=C_1\frac{1}{\omega_{or}^2}\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\cdot f_n(x) \quad (23)$$

となる。この表からKelvin Modelと他のModelが本質的に振動的性質を異にすることが知られる。　但し$C_1=Z\omega^2$とする。

M-K Model	$y_{res.}\fallingdotseq C_1\frac{1}{\omega_{or}}\frac{\eta\eta_1}{E(\eta_1+\eta)}\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\cdot f_n(x)$	$h\cdot\omega_{or}\fallingdotseq\frac{1}{2}\frac{E(\eta+\eta_1)}{\eta\eta_1}$
3E Model	$y_{res.}\fallingdotseq C_1\frac{1}{\omega_{or}}\frac{\eta_1}{E}\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\cdot f_n(x)$	$h\cdot\omega_{or}\fallingdotseq\frac{1}{2}\frac{E}{\eta_1}$
K Model	$y_{res.}\fallingdotseq C_1\frac{1}{\omega_{or}^3}\frac{E_1}{\eta_1}\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\cdot f_n(x)$	$\frac{h}{\omega_{or}}=\frac{1}{2}\frac{\eta_1}{E_1}$
M Model	$y_{res.}\fallingdotseq C_1\frac{1}{\omega_{or}}\frac{\eta}{E}\frac{\int_0^l f_n(x)dx}{\int_0^l f_n^2(x)dx}\cdot f_n(x)$	$h\cdot\omega_{or}\fallingdotseq\frac{1}{2}\frac{E}{\eta}$

4. 従来の振動論に対する一二の検討。粘性棒の曲げ振動解には姉沢,末広,Nolle,小野木等のKelvin模型としての解があるのみである。この理論を実際の構造物例えば末広教授の行つたよりにコンクリート構造物に適用すると100%以上の振動が生じ得ないという推論が生れる。Kelvin体に於る$y_{res}\propto\frac{1}{\omega_{or}^3}$，$\frac{h}{\omega_{or}}=const$の関係から生ずる当然の結論であるがコンクリートをKelvin体とすること自体に問題がある。Housnerが導いた速度spectrum一定の関係から同様地盤に同様材料の構造物を建るとその自個週期に関せず一定速度を考えて耐震設計すると云う議論がある。速度spectrum一定の関係は$h=const$のとき成立するのでKelvin模型を考えて導いたこのspectrumに於てかゝる概念が理論上成立する筈がない。

5. 実物構造物についての検討。従来の実測結果で以上の議論に使用出来る例は少いがこゝに岡本教授が殿山ダムについて行つた実測の結果から計算したものは下表の如くでKelvin模型とするよりMaxwell系統の模型が現実をよく説明することが分る。

振動型	$\omega_{or}/2\pi$	$y_{res.}$	h	$\omega_{or}\times y_{res}$	$\omega_{or}^3\times y_{res}$	$h\times\omega_{or}$	h/ω_{or}	$\omega_{or}/2\pi$	y_{res}	h	$\omega_{or}\times y_{res}$	$\omega_{or}^3\times y_{res}$	$h\times\omega_{or}$	h/ω_{or}
対称 1次	5.6	1.7×10^{-2} m.m.	0.027	6.1×10^{-1}	78	0.97	7.5×10^{-4}	6.2	1.9×10^{-2} m.m.	0.025	7.4×10^{-1}	112	0.97	6.4×10^{-4}
2 〃 次	9.8	1.2 〃	0.015	7.4 〃	2790	0.74	2.4 〃	10.5	1.04 〃	0.016	6.9×10^{-1}	3000	1.05	2.4 〃
逆対称 1次	5.2	3.6 〃	0.046	11.7 〃	124	1.17	14.1 〃	5.9	4.7 〃	0.039	17.4×10^{-1}	238	1.44	10.5 〃
水位	EL 125m.							EL. 112m						