

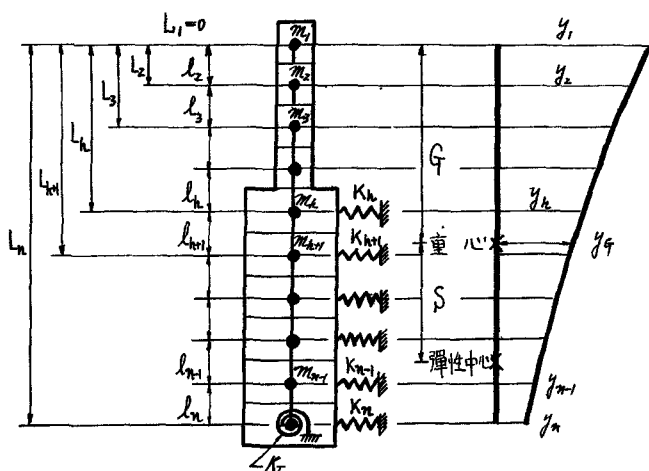
新橋脚の合理的設計及既存橋脚の健全度判定のためには、橋脚の振動性状を知る必要がある。所が橋脚は頭部が橋桁に連結され基部が地中に埋れているのであるから、橋梁全体を対象とした非線型振動が解明されて初めて橋脚の振動性状が明らかになるものである。しかし初めから之にとびつく事は困難な事であるから、先づ橋桁のない橋脚が線形振動をする場合の理論式を求めて之を実測値と比較する事から初め、次第に目的に近づく方法を取らなければならない。今回はこの最初の段階について報告する。

1. 理論式の誘導

橋脚を細分し各部分の質量は夫々の重心に集中させ、地盤からの反力は図示の如きバネにおきかえた模型を考える。この振動模型の運動エネルギー及位置エネルギーは行列を用いて次の如く表はす事が出来る。

$$K.E. = \frac{1}{2} (\dot{y}) [m] (\dot{y}) \quad \text{----- (1)}$$

$$P.E. = \frac{1}{2} (\bar{y}) [K + K_T + DL^2 D] (\bar{y}) \quad \text{---- (2)}$$



但し (y) = 各点の横変位 をたてに並べた列ベクトル。

$$(\dot{y}) = \frac{d}{dt} (y)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ & & & m_n \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, [K_T] = \frac{K_T}{l_n} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, [L] = \frac{1}{6EI_0} \begin{bmatrix} 2l_1^2 & l_1^2 & \\ l_1^2 & 2(l_1+l_2)l_2 & \\ & l_2^2 & \ddots \\ & & & 2l_{n-1}^2 & l_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$[D] = [\bar{d} l^{-1} d] = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & \ddots \\ & & & l_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$l'_i = \frac{I_0}{I_i} l_i$$

(1), (2) 式を Lagrange の方程式に代入し、更にバネ常数に比例する粘性減衰 (比例常数を λ とする) を考慮すると次式を得る。

$$[m](\ddot{y}) + \lambda [K + K_T](\dot{y}) + [K + K_T + DL^2 D](y) = (f(t)) \quad \text{----- (3)}$$

但し $(f(t))$ = 各質点に作用する外力 f_i をたてに並べた列ベクトル。

2. 理論式の解

(3) 式の減衰項及右辺が 0 となった所謂非減衰自由振動を考え、このときの n 次固有円振動数及それに対応する規準振動型 (各点の横変位をたてに並べたベクトルで表はす) を夫々 ω_i , (u_i) とし

$$[w^2] = \begin{bmatrix} w_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n^2 \end{bmatrix}, \quad [u] = [u_1 u_2 \dots u_n], \quad [\bar{u}] = [u] \text{ の転置行列}$$

なる行列を定義すると $[\bar{u}][m][u] = [E]$, $[\bar{u}][K + K_T + DL^T D][u] = [w^2]$ なる関係がある。

今 $(y) = [u](q)$ によって変数 (y) を (q) に変換し (3) 式全体に左から $[\bar{u}]$ をかけると

$$(\ddot{q}) + 2[\alpha](\dot{q}) + [w^2](q) = [\bar{u}](f(t)) \quad \text{----- (但し } [\alpha] = \frac{1}{2}[\bar{u}][K + K_T][u]) \text{-----} \quad (4)$$

この解は Laplace 変換を用いると次の如く表はされる。

$$(q) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s^2 + 2s\alpha + w^2]^{-1} \{ [s + \alpha](q_0) + (\dot{q}_0) + [\bar{u}](\mathcal{L} f(t)) \} \right\} \quad \text{-----} \quad (5)$$

$[\alpha]$ は一般に対角行列ではない。しかし橋脚は剛体に近い振動をすると考えられるので、近似的に $2[\alpha] \Rightarrow \lambda[w^2]$ の如く対角行列になると仮定すると (5) 式は簡単に解けて

$$(y) = [u](q) = [u] \left[\frac{w}{\beta} e^{\alpha t} \cos(\beta t - \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta}) \right] [\bar{u}][m](y_0) + [u] \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right] [\bar{u}][m](\dot{y}_0) \\ + [u] \left\{ \int_0^t \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha(t-\tau)} \sin \beta \tau \right] [\bar{u}](f(t-\tau)) d\tau \right\} \quad \text{----- (但し } \beta^2 = w^2 - \alpha^2, (y) = \text{初速度} \\ (y) = \text{初期変位} \text{)-----} \quad (6)$$

尚三角函数を含む行列はいづれも $\{ \}$ の中に書かれた函数に含まれる α, β, w にサフィックス i をつけ $i = 1, 2, \dots, n$ の値を対角線上に並べた対角行列である。

外力が $(f(t)) = (f) \cos pt$ 或いは $(f) \sin pt$ で表はされるときは (6) 式の第三項は

$$[u] \left[-\frac{\mu}{w\beta} e^{\alpha t} \cos(\beta t - \tan^{-1} \frac{\alpha(w^2 + \beta^2)}{\beta(w^2 - \beta^2)}) + \frac{\mu}{w^2} \cos(pt - \tan^{-1} \frac{\alpha\beta}{w^2 - \beta^2}) \right] [\bar{u}](f) \quad \text{-----} \quad (7-1)$$

或いは

$$[u] \left[-\frac{\mu}{w\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t - \tan^{-1} \frac{\alpha\beta}{w^2 - \beta^2}) + \frac{\mu}{w^2\beta} \sin(pt - \tan^{-1} \frac{\alpha\beta}{w^2 - \beta^2}) \right] [\bar{u}](f) \quad \text{-----} \quad (7-2)$$

となる。但し $\mu = w^2 / \sqrt{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$, $\beta^2 = w^2 - \alpha^2$

最後に地震を対象とする場合は $(f(t))$ の変りに $-[m](1)\ddot{y}_e$ を用いる事によって、(6), (7) 式より地震との相対変位を求める事が出来る。但し (1) = 1 をたてに並べた列ベクトル。

3. $[w^2]$ 及 $[u]$ の近似計算

前にも述べた通り $[w^2], [u]$ は

$\{[m]w^2 - [K + K_T + DL^T D]\}(y) = 0$ ----- (8) の固有値及固有ベクトルを集めて行列の形にしたものである。今近似的に橋脚が剛体として振動するものと仮定すると、任意の二点の横変位 y_3, y_7 , 或いは重心の横変位 y_g と回転角 θ を変数に取つて、

$$(y) = \frac{1}{q-L_3} \begin{bmatrix} -L_1+L_7 & L_1-L_3 \\ \vdots & \vdots \\ -L_n+L_7 & L_n-L_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q-L_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & q-L_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_g \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{----- (} L_1 \dots L_n, q \text{ 等については図参照)-----} \quad (9)$$

と表はされるから (8) 式は次の如く簡易化される。

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sum m_i (L_i - L_1)^2 & -\sum m_i (L_i - L_1)(L_i - L_3) \\ -\sum m_i (L_i - L_1)(L_i - L_3) & \sum m_i (L_i - L_3)^2 \end{bmatrix} w^2 - \begin{bmatrix} \sum k_i (L_i - L_1)^2 & -\sum k_i (L_i - L_1)(L_i - L_3) \\ -\sum k_i (L_i - L_1)(L_i - L_3) & \sum k_i (L_i - L_3)^2 \end{bmatrix} - K_T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_7 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{-----} \quad (10)$$

$$\text{或いは } \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} w^2 - \begin{bmatrix} 1 & -S \\ -S & S^2 + (K_T/K_B) \end{bmatrix} K_B \right\} \begin{pmatrix} y_g \\ \theta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{----- (但し } M = \sum m_i \quad J = \sum m_i (q - L_i)^2 \\ K_B = \sum k_i \quad S = \sum k_i (L_i - q)/K_B \text{)-----} \quad (11)$$

実測値との比較、近似計算の精度等については会場で述べる。