

空間的に拡張された囚人のジレンマゲームにおける人口比のネットワーク構造依存性

吉野 隆¹

¹正会員 博(工学) 東洋大学助教授 工学部環境建設学科(〒350-8585 埼玉県川越市鯨井 2100)
E-mail: tyoshino@eng.toyo.ac.jp

「空間的に拡張された囚人のジレンマ」と呼ばれているゲームを幾つかのグラフ構造にあてはめ、結果の構造依存性について検討した。ゲームには利得に対するコストの比(相手を裏切ることによって得られる利益)で定義づけられる囚人のジレンマを用い、協調戦略人口の割合のコスト利得比による違いを調べた。また、総人口数(ネットワークの頂点数)を変えて、その役割についても検討した。円環グラフと車輪グラフの結果を比較すると、偶然に選ばれた特に力が強いわけでもないリーダーのリーダーシップが全体を変動が少ない状態に落ち着かせる働きをもつことがわかった。また、ランダムグラフで辺の存在確率を高めてゆくと、確率が高くなるほど協調戦略は生き残りづらく、完全グラフ上では協調戦略は生き残ることができなかった。

Key Words : prisoner's dilemma, network structure, population change

1. はじめに

囚人のジレンマゲームはゲーム理論の中でも特に注目を集めており、利益追求型の社会やある種の生態系のモデルとして広く検討されている。例えば、環境問題における企業の戦略、税金の支払いにおける国民の戦略、そして生態系における生物種の戦略などが挙げられる¹⁾。囚人のジレンマは、ふたりのプレーヤーがともに協力と裏切りというふたつの戦略を選べるゲームを行ったときに考えられる4種類の利得が、以下の大小関係を満たすゲームとして定義される。1) お互いの協力のよって得られる利得はお互いの裏切によって得られる利得よりも大きい。2) 相手が協力をしたときに自分の裏切りによって得られる利得はお互いの協力によって得られる利得よりも大きい。3) 相手が裏切ったときに自分の協力によって得られる利得はお互いの裏切りによって得られる利得よりも小さい。4) お互いが協調したときの利得の総和は、協調と裏切りによって得られる利得の総和以上であるために、裏切りを繰り返しても決してお互いが協調したときの総利益に及ぶことがない。

囚人のジレンマでは、相手の戦略が判明したときにお互いが戦略を変えない状態(Nash 均衡解)を求めると、お互いが裏切ることが最良の戦略であることが知られている。しかし、これまでの研究によると、囚人のジレンマを繰り返し行うゲームの場合には、「しっぺ返し」という相手の裏切りをすぐに忘れて協力する戦略が有効であることが知られている²⁾。また、空間的に

拡張された囚人のジレンマでは、裏切りの利得が少ない場合には協調戦略が集団を作って生き残るという結果がみられる³⁾。これは、協調戦略がクラスタリングすることによって、お互いを維持しやすい環境を作るためである。また、規則的なネットワークにランダムネスを導入した場合、ランダムな構造であるほど、高いコスト利益比でも生き延びることができることも判明している⁴⁾。以上のように囚人のジレンマ的な状況においては繰り返しと空間構造(周囲との連結関係)は、Nash 均衡解とは異なる結果を生み出すという点で重要な役割を担っているといえる。

本研究ではいくつかの代表的なネットワーク構造について、協調戦略をとるプレーヤーの人口の変動を検討する。プレーヤー間の関係が異なるために、ネットワークの構造によって異なる人口変動を示すことが期待される。そして、人口の構造依存性を系統的に調べることで、与えられたゲームの生き残り戦略における社会構造の重要性を検討する。

2. モデル

(1) ネットワーク

検討したのはグラフ理論で議論されることが多い円環、車輪、二分木、四分木、完全、そしてランダム各グラフである。表-1にその一般的な性質を示す。(ただし、ランダムグラフの性質は期待値であり、すべての実現されたグラフについて言えるものではない)。また頂点の数を20に固定したときの連結のしかたの違いを

表-1 検討したネットワーク（グラフ）の性質。

構造	辺の総数	平均次数	直径
円環	N	2	$N/2$
車輪	$2N - 2$	$4 - 4/N$	2
二分木	$N - 1$	$2 - 2/N$	$2(\log_2(N + 1) - 1)$
四分木	$N - 1$	$2 - 2/N$	$2(\log_4(3N + 1) - 1)$
ランダム	$pN(N - 1)/2$	$p(N - 1)$	$(\ln N)/(\ln(pN))$
完全	$N(N - 1)/2$	$N - 1$	1

※ N は頂点の数を表す。

表-2 囚人のジレンマのペイオフマトリクス。

戦略		プレイヤーB	
		協調	裏切り
プレーヤーA	協調	(1, 1)	$(-r, 1 + r)$
	裏切り	$(1 + r, -r)$	(0, 0)

図-1 に示す円環グラフ（図-1 の上段左）は線上に連結され周期境界条件を適用したシステムに相当している。車輪グラフ（図-1 の上段右）は円環グラフ中の 1 頂点のみが他の頂点と連結したグラフである。この頂点のためにすべての 2 点間の距離が 2 以内になる。二分木グラフ（図-1 の中段左）と四分木グラフ（図-1 の中段右）はともにループを持たず、ひとつの頂点から 2 本または 4 本の辺が階層的に接続されてる構造をもっている。計算では、対称性を良くするために、頂点の数 N を自然数 n を用いて $(2^n - 1)$ （二分木の場合）もしくは $(4^n - 1)/3$ （四分木の場合）に設定している。ランダムグラフ（図-1 の下段左）には二種類の構成方法があるが、本研究で用いたのは辺の生成が可能なすべての点の組み合わせについて与えられた確率 p によって生成するか否かを決定する方法である。ランダムグラフでは p 依存性に注目した。 p が 1 に近づいていくほどネットワークが密になる。 $p = 1$ すなわちすべての二点の組み合わせについて辺が作られているグラフが完全グラフ（図-1 の下段右）である。

(2) 囚人のジレンマ

ネットワークの頂点上にプレイヤーを配置し、プレイヤーの戦略の変遷を調べた。方法は文献³⁾と同様であるが、以下にその概略を述べる。ゲームのペイオフマトリクスを表 2 に示す。括弧内の左はプレイヤー A のペイオフ、右はプレイヤー B のペイオフを表す。表中の r はゲームの性質を決める唯一のパラメータであり、互いが協調戦略をとったときの経費と利得の比を表す。以下ではこれをコスト利得比と呼ぶ。この値はまた協

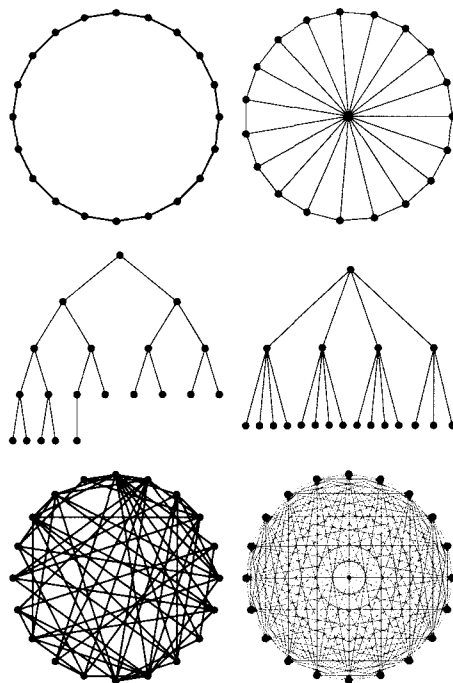


図-1 本研究で検討して代表的なグラフ（ $N = 20$ の場合）。

調戦略に対する裏切りの利益の増分にもなっている。 r の値が大きいことは、裏切りによる利益が大きいことを示している。

プレイヤーが選べる戦略は協調と裏切りの 2 種類のみであり、乱数によって戦略を決定する混合戦略はとらないものとした。初期状態では各プレイヤーは与えられた確率でランダムに戦略を割り当てられる。このときの全体数における協調戦略を持つ頂点の割合を 0.5 としている。戦略の決定の後、各プレイヤーはネットワークで連結された相手と囚人のジレンマゲームを行い、取引によって生じる利得（ペイオフ、 P_x ）を計算する。利得 P_x は、その時刻における連結された相手とのゲームの結果の平均値、すなわちある連結相手とのゲームによる利得の総和をゲーム相手の数で除した値である。取引後にプレイヤーは次の取引の戦略を決定する。連結されている中からランダムに選ばれた相手のペイオフ（ P_y ）との差によって、戦略を相手と同じようにするか否かを判断する。一回の更新においてすべてのサイトを更新することで、全体の時間変化を観察している。遷移確率 $f(P_y - P_x)$ は、

$$f(P_y - P_x) = \begin{cases} (P_y - P_x)/(1 + 2r) & (P_y - P_x) > 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。

全ての計算は、ゲームを 5000 回繰り返して、その結

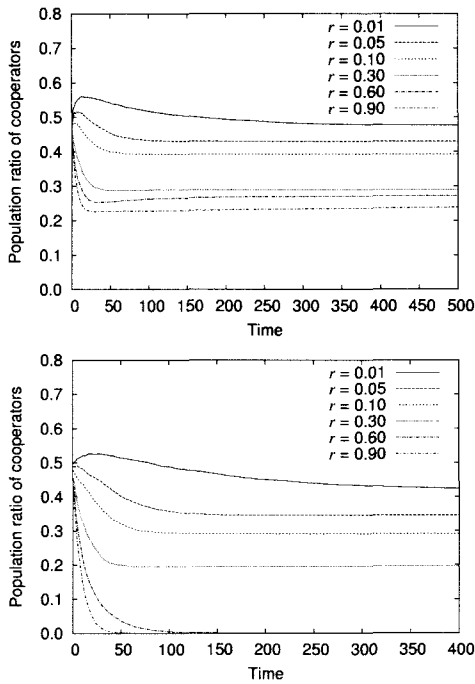


図-2 円環（上）と車輪（下）における経時変化。

果を確認している。確率に依存する結果を考慮するために、乱数の種を変えてこのゲームを 200 回試行した。以下に示す結果の多くはその試行の平均である。計算では協調戦略を選択したプレーヤーの人口に注目した。設定した総人口（グラフの頂点の数， N ）は計算条件によって異なるので，結果はすべて人口比で検討している。計算に用いたコスト利得比 r は既存の研究を踏まえて，0.01 から 0.09 まで 0.01 きざみおよび 0.1 から 0.9 まで 0.1 きざみで設定した。

3. 結果

(1) 円環グラフと車輪グラフ

はじめに円環グラフと車輪グラフの結果を比較することで，偶然に選ばれたリーダーの役割について検討する。図-1 に示したように，円環グラフは各プレーヤーは輪の状態に配置され，両隣のプレーヤーとのみ連結している。コンピュータシミュレーションの立場で言えば，円環グラフは 1 次元格子に周期境界条件を適用したことに相当していると言える。それに対して，車輪グラフでは全てのプレーヤーに参照されているプレーヤーが存在している。すべてのプレーヤーは強制力や資本の差を有していないので立場的には対等である。しかし，すべてのプレーヤーを参照されているという意味で車輪グラフには（偶然に作られた）暗黙のリーダー

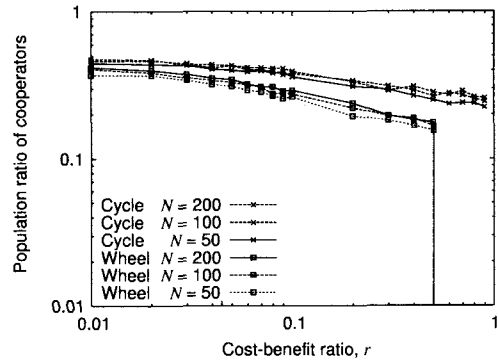


図-3 円環グラフと車輪グラフにおける r 依存性。

が存在していると言って良い。円環グラフと車輪グラフの結果を比較することで，この暗黙のリーダーの存在による人口変動の違いについて検討する。

図-2 に円環グラフと車輪グラフにおける人口比の経時変化を $N = 200$ の場合について示す。この結果は 200 個のサンプルについて各時刻ごとに平均を求めた結果である（以下のすべての経時変化はすべて同じように平均値を表している）。過渡的な振る舞いのあとで，それぞれのコスト利得比に特有な一定値に落ち着くことがわかった。また，どちらのグラフの場合も， r が大きくなるにつれて最終的に落ち着く値が小さくなることがわかった。これを確かめるために，人口比が最終的に落ち着く値を求めた。その結果を図-3 に示した。人口比は過渡的な変動の影響を除くために最初の 1000 ステップの計算の結果を除いて平均を求めている（以下に示すすべての最終値も過渡的な影響を除くために最初の 1000 ステップの計算結果を除いて平均をとっている）。円環グラフの場合， r の減少に伴う人口比の減少は車輪グラフに比べて少ないことが解った。車輪グラフの場合には $r = 0.5$ から $r = 0.6$ の間で急激な減少が見られ， $r \geq 0.7$ では協調戦略の割合はゼロとなる。図に示したように，頂点の数 $N = 50, 100, 200$ の 3 つのケースについて検討したが，それぞれのグラフとも頂点の数による結果の違いは見られなかった。

図-4 に 200 の時系列に対して，各時刻での人口比の分散を計算した結果を示した。円環グラフのすべての結果が車輪グラフの結果に較べて，変動が大きいことがわかる。すなわち，車輪グラフに存在する暗黙のリーダーは，協調戦略の人口比を円環グラフよりも減少させるものの全体の変動を抑制しシステムを安定させる効果がある。

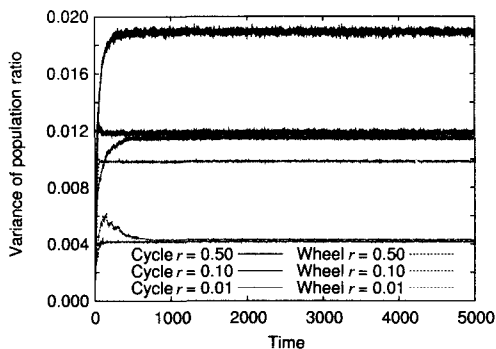


図-4 円環と車輪における人口比の分散の経時変化。

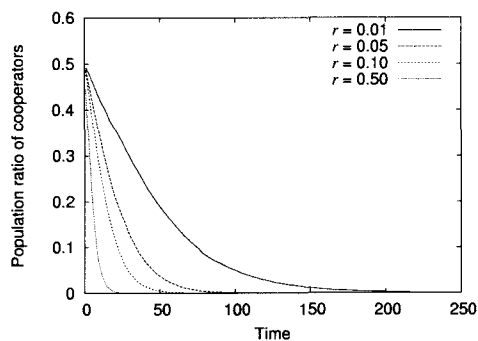


図-6 完全グラフにおける人口比の経時変化。

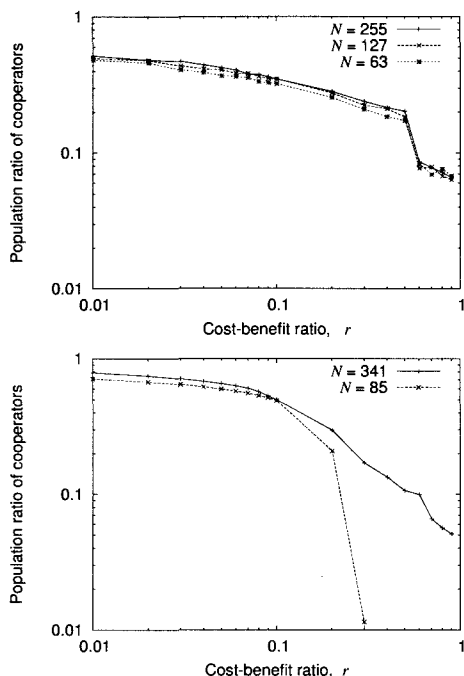


図-5 二分木（上）と四分木（下）における r 依存性。

(2) 二分木グラフと四分木グラフ

木グラフを用いて階層構造がメンバーに与える影響を検討した。木グラフはローカルなグループの代表同士が影響しあい更にその代表同士が影響し合うという入れ子構造を表している。重要な点として代表は車輪グラフと同様に特別な権限がないことが挙げられる。現代社会のシステムの多くはこのような入れ子構造を持っている。そのような意味で、構成人数の異なる入れ子構造の性質の違いは興味深い。

二分木の場合と四分木でも r の増加に伴う協調戦略の人口比の減少がみられる。結果を図-5に示す。特に二分木の場合には、頂点数の違いによる人口比に大き

な違いが生じなかった。以下に、ふたつのグラフ間でそのコスト利得比依存性に見られた違いをまとめる。

二分木の場合には不連続とも思われるような急激な減少が見られる。ただし、車輪グラフの場合とは異なり、ゼロに向かうものではなく、新しい有限値に向かうもののようと思われる。

四分木の場合には不連続な減少はみられず、頂点数が多いケースが高い人口比のまま推移してゆくことがわかった。ただし、 $N = 85$ の場合が示すように、頂点数が少ないと r が大きい場合に、車輪グラフと同様なゼロに向かう急激な減少が観察される。このような傾向がどの程度の頂点数まで見られるのかは不明である。

同一の r におけるふたつのグラフの値を比較してみると、 r が小さい場合には四分木の方が大きく、 r 大きい場合には二分木の方が大きいことがわかる。四分木のようにグループの構成人数が多さは小さなコスト利得比の場合には友好的な関係を築くために役に立つが、逆に協調戦略が環境の変動に鈍感だがある状態を超えると急にその影響が出るものと考えられる。

(3) 完全グラフとランダムグラフ

ランダムグラフのパラメータである p すなわち辺の存在確率を変えることによって、でたらめな結びつきで作られるネットワークの発達による人口比のコスト利得依存性の違いを調べる。ランダムグラフについて言及された文献⁵⁾によれば、ランダムグラフは、頂点数が無制限のとき、各頂点から出ている辺の数（頂点の次数）の期待値が1以上で巨大なクラスターが作られることが証明されている。ここで示す結果はすべて $N = 50$ の場合についてなので、 $p_c = 0.02$ のときに、巨大クラスターが出現する確率が1となる。本研究で行った計算はすべての頂点が連結していなくても破綻しないが、孤立している点があると破綻してしまう。そして、頂点数が有限な場合、 p が p_c を超えていても孤立点の出現する場合がある。そのため、今回は $p = 0.2$ 以上の場合

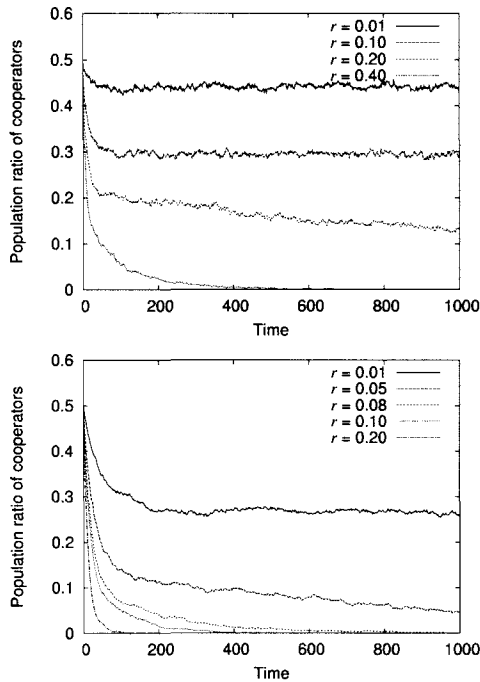


図-7 $p=0.2$ (上) および $p=0.8$ (下) での経時変化。

について検討している。

はじめに、完全グラフ (すなわち、 $p=1$ のランダムグラフにほぼ相当するグラフ) における人口比の経時変化を図-6に示す。図のように、今回計算したすべてのコスト利得比において協調戦略は持続できないことがわかった。本研究の結果やこれまでの研究^{3),4)}で計算された条件のもとで協調戦略の人口比がすべての条件でゼロになったのは完全グラフのみである。同じ傾向は $N=20$ の完全グラフの場合にも観察された。すなわち、完全グラフ上での囚人のジレンマゲームは協調戦略にとって圧倒的に不利であることがわかった。

次に、ランダムグラフの p の値を変えて、協調戦略がどのように減少してゆくのかを調べた。図-7に $p=0.2$ および $p=0.8$ の場合の人口比の値の平均値の経時変化を示した。他のグラフと同様に、ランダムグラフの人口比も過渡的な振る舞いのあとで、一定値に落ち着く傾向がみられた。 p の値にかかわらず r が大きいほど協調戦略の人口比は小さいことがわかる。また、最終的に人口比がゼロになる r の開始点が p の値によって異なることが予想される。

最後に、ランダムグラフにおける人口比の r 依存性が結合確率によってどのように異なるのかを調べる。図-8にその結果を示した。どの場合も r の増加に伴い協調戦略の人口は減少する。 $p=0.2, 0.4, 0.6$, そして 0.8

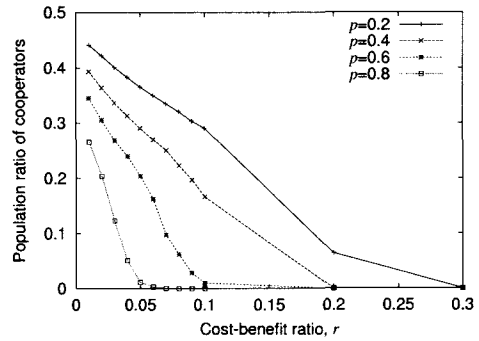


図-8 ランダムグラフにおける r 依存性。

の場合を比較すると 0.2 のほうが協調戦略が多いまま推移してゆくことがわかる。他のグラフと異なり、すべての p について、人口比がほぼ直線的にコスト利得比に依存していることが興味深い。

4. 議論

これまでの結果をもとにして、囚人のジレンマ的な状況に陥りやすい環境システムにおけるネットワーク構築の重要性を議論する。本研究は単純な囚人のジレンマゲームを単純なネットワーク構造上で計算しただけではあるが、幾つかの示唆に富む結果を得ているので、これをもとに議論をしておくことは無駄ではないと思われる。

円環グラフと車輪グラフの結果の違いは、システムにおけるリーダーの役割を明らかにした。今回の計算では、暗黙的なリーダー (言い換えれば無責任なリーダー) の存在はシステムを安定化させるものの全体の利益を多くする方向には働かないことを明らかにした。これはシステムを省みないリーダーの存在がシステム全体の利益を損なうことを意味する。より意志の強いリーダーが存在する場合、すなわち協調戦略を維持しようとするリーダーが存在する場合に、システムがどのように振る舞うのかは興味深いテーマである。また、この主張を強固にするために、リーダーの戦略の変遷と協調戦略の人口比との関係の調査も必要であると考えている。

木構造では、構成人数が違う二種類の階層構造における結果の違いを確認した。今回調べたのは、細分化された階層構造を持つが各階層におけるリーダーがやはり暗黙的 (つまり無責任) な場合に相当している。分岐の数の違いによる結果の違いは、システムを最も効率よく移動させるグループ分けが存在する可能性を意味している。例えば、小グループ (二分木) の方が協調人口比の r 依存性が少なかった事実は、小さいグループ

の方が裏切りの誘惑に対して抵抗する力が強いことを表している。また、裏切る魅力が少ない (r が小さい) 場合には、グループの人数が多い方が利得を稼げる可能性が高いことも今回の計算から推測される。この2点は、システムの堅牢化と効率化という背反的なふたつの目標に対する矛盾が木構造の分岐数という簡単な項目に対しても出現するという意味で興味深い結果である。本研究では注目しなかったが、木構造システムにおいても暗黙的なリーダーは存在している。このリーダーの戦略を固定した場合の結果や、今回の計算におけるリーダーの戦略の変遷も注目する必要があると考えている。

本研究の結果の中でも象徴的だったのは、完全グラフにおける協調戦略の消滅である。ランダムグラフにおいて、 p の値が大きいくほど協調戦略が消滅しやすいことは、完全グラフにおける結果を支持するものとなっている。ネットワーク構造が密になると協調戦略が機能しないことは、社会の発展が社会の混乱を招くことになりかねないことを意味している。システムが発展するとルール作りが必要なことはこの結果と無関係ではないのかもしれない。ただし、実際のシステムでは、連結はでたために行われるのではなく、なんらかの紹介を通して行われることが多い。そのため、ランダムグラフの連結確率でシステムの発展を表すことは、かなりの単純化を行ったことに相当している。将来的には、システムが発展してゆくダイナミクスをきちんと整備してその枠組み内で今回のような計算を行う必要があるだろう。また、今回は検討しなかったが、同一の r のもとで p を変化させたときの人口比依存性とは

でも興味深いテーマである。

空間的に拡張された囚人のジレンマゲームがネットワーク構造によって異なる結果を示すことは、システムのダイナミクスを考える上で重要な意味合いを持つ。今後は、実用に耐えうる議論ができるように、ゲームの構造や解析を更に精密化してゆく必要があると考えられる。

謝辞

本研究は東洋大学産業共生研究センターから研究補助を受けている。

参考文献

- 1) 松原望：計量社会科学，東京大学出版会，pp. 33-70, 1997.
- 2) R. アクセルロッド (松田裕之訳)，つきあい方の科学，ミネルヴァ書房，1998.
- 3) Hauert, C. and Doebeli, M.: Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game, *Nature*, Vol. 428, pp. 643-646, 2004.
- 4) Yoshino, T.: Prisoner's dilemma on square lattice like small-world network, *Human and Artificial Intelligence Systems - From Control to Autonomy-* (Eds: K., Murase, L.C. Jain, K. Sekiyama, and T. Asakura), Advanced Knowledge International, pp. 395-400, 2004.
- 5) 例えば, Albert, R. and Barabási, A-L.: Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, pp. 47-97, 2002.

Network structure dependence of population ratio on spatially extended prisoner's dilemma games

Takashi YOSHINO

Evolution of the spatially extended prisoner's dilemma is calculated on some characteristic networks: cycle, tree, wheel, random, and complete graphs. The players on the vertices of a given network repeat the prisoner's dilemma game with neighbors changing their strategies according to their benefits. The game is characterized by the payoff matrix which is defined by cost-benefit ratios(r). We consider the r dependence of the population ratio of cooperators. The results depend on both the network structure and populations (the number of vertices). Comparing the cases of circle and wheel graphs reveals that the implicit leader on the wheel graphs stabilizes the fluctuation of the population ratio. In cases of the random graphs, the population ratio of cooperators decreases with an increase of the connection probability.