

(17) 安定化 ISPH 法を用いた流体衝撃力評価と精度検証

The accuracy validation and estimation of fluid impact force using stabilized ISPH

林 高德*, 浅井 光輝**, Abdelraheem M. Aly***, 園田 佳巨****

Takanori HAYASHI, Mitsuteru ASAI, Abdelraheem M. Aly, Yoshimi SONODA

* 九州大学大学院修士課程 工学府建設システム工学専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

** 九州大学准教授 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

*** 九州大学大学院博士課程 国際環境工学特別コース専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

**** 九州大学教授 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

Key Words : (fluid impact force, incompressible SPH, free surface flow, pressure Poisson equation,)

キーワード: 流体衝撃力, 非圧縮性 SPH 法, 自由表面流れ, 圧力ポアソン方程式

1. はじめに

近年の異常気象に伴うゲリラ豪雨による河川の氾濫災害, 大型化した台風の高波, 地震時の津波等による流域構造物の災害が多発している. このような災害から人命の保護し, 流域構造物の被害を軽減するためにも, 各種防護構造の設置が望まれている. こうした防護構造の設計には精緻な流体衝撃力の見積もりが必要不可欠である.

本研究では, 粒子法の一つである SPH 法による流体衝撃力評価の精度を検証した. 従来型の SPH 法では特有の虚偽の圧力数値振動が現れる等, 圧力評価に依然として大きな問題が残されていた. そこで, SPH 法における圧力精度に大きく影響を及ぼす圧力ポアソン方程式のソース項について再考し, 新たな安定化手法を提案した. また, 参照実験と数値解析解を比較検証を通して提案法の有用性を検討した.

2. 非圧縮性 SPH 法の基礎概念

SPH 法による空間離散化法に関する基礎式を示した後, 非圧縮性流体の支配方程式とその離散化方法について述べ, 最後に射影法による分離型スキームも用いた非圧縮性 SPH 法 (以下, ISPH 法) の手順を概説する.

2.1 SPH 法の基礎式

図-1 に示すように, 任意の点 x_i において定義される時刻 t でのスカラー関数 $\phi(x_i, t)$ が, 次式に示す積分形式として記述できるものとする.

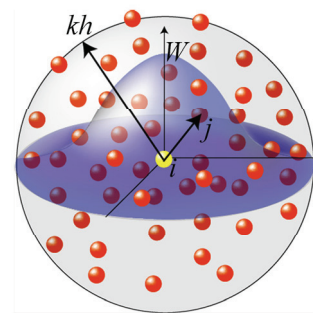


図-1 SPH 法における近傍粒子と影響半径

$$\phi(x_i, t) = \int_V W(r_{ij}, h) \phi(x_j, t) dv \quad (1)$$

ここで, W はカーネル関数と呼ばれる一種の重み関数であり, $r_{ij} = |x_i - x_j|$ は評価点と近傍粒子との距離関数を示す. SPH 法では, 上式で示した積分式がある影響半径 h 内に含まれる近傍粒子の値を用いた重み付き総和によって近似できるものと仮定する.

$$\phi(x_i, t) \approx \langle \phi \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h) \phi_j(x_j, t) \quad (2)$$

以降, 下付き添え字 i, j は粒子番号を示し, ρ_j, m_j はそれぞれ粒子 j が代表する近傍領域の密度と質量とする. また, $\langle \cdot \rangle$ が付いた関数は上記に示した SPH 法による近似値であるものとする.

物理量の勾配は SPH 法の近似式(2)を微分することで直接導出できる.

$$\nabla \phi(x_i) \approx \langle \nabla \phi_i \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (\phi_j - \phi_i) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (3)$$

これは, 以下のように変形できる.

$$\langle \nabla \phi_i \rangle = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{\phi_j}{\rho_j} + \frac{\phi_i}{\rho_i} \right) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (4)$$

ここでカーネル関数は, 以下の3つの条件

- ・ 解析領域内のカーネル関数を総和は1
- ・ 影響範囲外では関数はゼロ
- ・ 極限はデルタ関数に収束

を満足する関数であればよく、釣鐘型関数、ガウシアン関数、スプライン関数などが採用される¹⁾。

本研究では、より安定な計算が期待されるとの報告²⁾がある5次スプライン関数を採用することにした。以下、その関数式を示す。

$$W = \gamma \begin{cases} \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 + 15\left(1 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 & (r_{ij} < h) \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 & (h < r_{ij} < 2h) \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 & (2h < r_{ij} < 3h) \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $3h$ 以降はゼロとする。 γ はカーネル関数に課せられる第一制約条件を満足させるための係数であり、2次元、3次元問題ではそれぞれ $7/478\pi h^2$ 、 $3/359\pi h^3$ と設定する必要がある。

また、5次スプライン関数を採用したことで、影響半径 h の3倍の半径内の粒子が近傍粒子として判定される。SPH法では、近傍粒子の物理量を用いて一種の重み付き平均化を行なうため、近傍粒子が多くなることは計算効率の悪化に直結する。図-2に実際の5次のカーネル関数をグラフ化した。同図に示すように、影響半径の2倍離れるとカーネル関数値は無視できるほど小さな値となることから、数値解析上では粒子間距離 r_{ij} が $2h$ 以上の場合にはカーネル関数を強制的にゼロとすることで近傍粒子の数を減らす方針をとった。これにより、近傍粒子リストには r_{ij} が $2h$ 未満の粒子のみを加えればよく、計算量が低減できる。

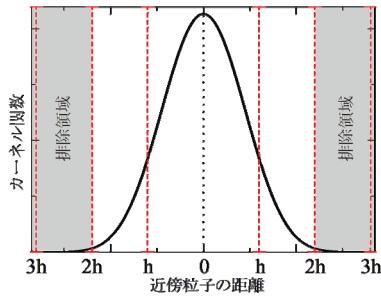


図-2 カーネル関数の取り扱い

2.2 非圧縮流れの支配方程式と SPH 法による離散化

非圧縮性流体問題では、質量と運動量の保存則を満足するように、流速、圧力を求める。ラグランジュ記述によれば2つの保存則は次式により記述できる。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} = 0 \quad (7)$$

ここで、非圧縮性の仮定から密度は一定値とすれば、質量保存則(6)は以下のように書き換えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

一般的な非圧縮性流体解析用 SPH 法では、先に非圧縮性を仮定したのちに、式(2)から式(4)に対応した粒子離散近似を代入する。結局、粒子 i において式(7)、(8)は以下のように近似できる。

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \approx -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla P_i \rangle + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle + \mathbf{g}_i \quad (9)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle \approx 0 \quad (10)$$

ここで、右辺第1項は式(4)における関数 ϕ に圧力 P_i を代入すればそのまま評価できるが、第2項については別途、速度のラプラシアンを粒子離散近似が必要となる。この速度ラプラシアン近似には次式を採用することにした。

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle = \frac{2}{\rho_i} \sum_j \left\{ m_j \left(\frac{r_{ij} \nabla W(r_{ij}, h)}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right) (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \right\} \quad (11)$$

ここで、 η はゼロ割りを避けるための安定化パラメータであり、文献³⁾に習って影響半径 h を参照し、 $\eta^2 = 0.0001 h^2$ と与えることにした。また、式(10)における速度の発散は式(3)を参照し次式により与えられる。

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla W(r_{ij}, h) \quad (12)$$

次節では、式(9)の左辺の時間微分の近似方法と併せて、圧力・速度の時間積分方法について概説する。

2.3 射影法を用いた変数分離スキーム

射影法では、ナビエ・ストークス方程式の圧力勾配項を無視した仮の状態を定義することで圧力と速度を分離でき、圧力については陰的に、速度は陽的に更新することが可能となる。ここでは先に示した SPH 法に射影法を適用することを考える。

時間ステップ n から $n+1$ における変数の更新手順を示す。まずは、式(9)中の時間微分項を前進差分近似するものとし、ある中間状態での速度 \mathbf{u}^* を定義することで速度を以下のように分離する。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (13)$$

分離後の加速度成分の内、前者が式(9)中の圧力勾配項に、後者がそれ以外の項に対応するものとすれば、仮の中間状態での速度は以下のように評価できる。

$$\frac{\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i^n \rangle + \mathbf{g}_i$$

$$\rightarrow (\text{予測}) \mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i^n + \Delta t (\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i^n \rangle + \mathbf{g}_i) \quad (14)$$

その後、3章で概説するいずれかの方法により圧力値が評価されたものとすれば、仮の中間状態から次の時間ステップにおける速度は以下のように更新できる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla P_i^{n+1} \rangle$$

$$\rightarrow (\text{修正子})\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}^* \quad (15)$$

$$\Delta\mathbf{u}^* = -\Delta t \left(\frac{1}{\rho} \langle \nabla P_i^{n+1} \rangle \right) \quad (16)$$

上記の手順における式(14), (15)はそれぞれ予測子・修正子計算と呼ばれ, 2段階で状態を更新することが ISPH 法の特徴である. 次章では, 圧力の評価方法のみに焦点をあて詳細を議論する.

3. 密度一定条件を緩和した圧力ポアソン方程式

ISPH 法の枠組みにおける圧力の解き方について説明する. 特に, 従来法における圧力ポアソン方程式を導出する過程の相違点についてのみ整理した後に, SPH 法における本来の密度近似方法に整合した修正案を提示する.

3.1 速度発散ゼロ条件による定式化

まずは速度発散ゼロ条件のみを用いた圧力ポアソン方程式の定式化を示す. これは Cummins と Rudman ら⁴⁾, Lee ら⁵⁾の研究で採用されている.

ここで, 全ての粒子において, 「非圧縮性流れ問題における質量保存則(8), すなわち速度発散ゼロ条件を満足している」ものとする. 式(16)の両辺の発散をとり, 前提条件とした速度発散ゼロ条件が成立することを考慮に入れると, 次に示す圧力ポアソン方程式を得る.

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle &= -\frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \Delta \cdot \nabla \mathbf{u}_i^* \rangle \\ &= \frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

ここで, 左辺項は式(11)と同様に次式により評価するものとした.

$$\langle \nabla^2 P_i \rangle = \frac{2}{\rho_i} \sum_j \left\{ m_j \left(\frac{r_{ij} \nabla W(r_{ij}, h)}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right) (P_i - P_j) \right\} \quad (18)$$

3.2 密度一定条件による定式化

次に, Shao ら⁶⁾, Kayyer ら⁷⁾の論文で用いられた密度一定条件のみを用いた定式化を示す. これは越塚らが提案した MPS 法⁸⁾と同様な方程式を導く.

一般的な質量保存則(8)において, 密度導関数においても予測子・修正子分離を行ない, 次の時間ステップでは希望的に「密度が最終的には初期密度と一致する」ものとするれば, 次の関係を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^0 - \langle \rho_i^* \rangle}{\Delta t} + \frac{\langle \rho_i^* \rangle - \langle \rho_i^n \rangle}{\Delta t} &= -\rho^0 \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \rangle \\ &= -\rho^0 \langle \nabla \cdot (\mathbf{u}_i^* + \Delta\mathbf{u}_i^*) \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

ここで, 予測子計算においては密度差が生じず, かつ速度発散もないとすれば, 上の関係式は次のように書き換えられる.

$$\frac{\rho_i^0 - \langle \rho_i^* \rangle}{\Delta t} = -\rho^0 \langle \nabla \cdot \Delta\mathbf{u}_i^* \rangle \quad (20)$$

ここで, 式(19), (20)において, 密度の SPH 近似は次式により与えられるものである.

$$\langle \rho_i \rangle = \sum_j m_j W(r_{ij}, h) \quad (21)$$

最後に, 式(17)のソース項を式(20)の関係式を用いて書き換えれば, 以下に示す密度一定条件を用いた圧力ポアソン方程式を得る.

$$\langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle = \frac{\rho_i^0 - \langle \rho_i^* \rangle}{\Delta t^2} \quad (22)$$

3.3 圧力一定条件を緩和した改良スキーム (提案法)

ここで, SPH 法における密度は式(21)に示すように粒子配置により数値的に評価されるものであり, 解析中に密度一定条件を厳密に満足し続けることは難しい. つまり, 近傍粒子数が固定され, 粒子が完全な一様分布を保持した状態でなければ, 密度は一定とはならない. このため, 瞬間的にはある程度の密度誤差が介入することを許容し, 長期的に密度変化が生じないようにスキームへと修正することを考える.

前述のように数値解析上ある程度の密度変化が生じることを念頭に置き, 圧縮性流体にも適用可能である一般的な質量保存則(6)からスタートする. 密度導関数を前進差分近似し, その後, 各物理量に対して以下のように SPH 近似する.

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \rangle = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\langle \rho_i^{n+1} \rangle - \langle \rho_i^n \rangle}{\Delta t} \quad (23)$$

ここで, 式(15)を参照し, さらに上の関係式を用いて式(17)の右辺項を書き換えれば,

$$\langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle = \frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* \rangle + \frac{\langle \rho_i^{n+1} \rangle - \langle \rho_i^n \rangle}{\Delta t^2} \quad (24)$$

となる. また, 次の時間ステップでの密度が初期密度と一致するものと希望的な要件をあたえれば, 密度増分 $\langle \Delta\rho_i^n \rangle$ は次式により与えられるはずである.

$$\begin{aligned} \langle \Delta\rho_i^{n+1} \rangle &= \langle \rho_i^n \rangle + \langle \Delta\rho_i^n \rangle \approx \rho^0 \\ \rightarrow \langle \Delta\rho_i^n \rangle &= \rho^0 - \langle \rho_i^n \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

ここでは, 瞬間的には密度一定を満足させなくてもよいとの考えから, 密度増分を本来より小さな値を与えるものとする.

$$\langle \Delta\rho_i^n \rangle \approx \alpha(\rho^0 - \langle \rho_i^n \rangle) \quad (26)$$

ここで, α は0~1までの値をとる緩和パラメータである. ここまでの仮定を用いれば, 結局, 式(24)で与えられた圧力ポアソン方程式は, 以下のように微修正される.

$$\langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle = \frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* \rangle + \alpha \frac{\rho_i^0 - \langle \rho_i^n \rangle}{\Delta t^2} \quad (27)$$

提案した圧力ポアソン方程式(27)は, 緩和パラメータをゼロとすれば速度発散ゼロ条件による定式化と完全に一致する. また, 瞬間的に初期の密度と一致した場合にも式(27)の第2項目は無視できるため, 同一視

できる. この定式化によれば, 速度発散ゼロと密度一定の両条件を適度に反映した結果が期待できる. 以降, 提案法を安定化 ISPH 法と呼ぶことにする.

4. 数値解析例

本章では, 提案する安定化 ISPH 法における緩和パラメータの事前決定方法とその必要性について議論し, その後, Kleefsman⁹⁾らによる水柱崩壊実験と解析結果を比較し, その精度について検証する.

4.1 事前解析による緩和パラメータの決定

上述の通り, 提案する圧力ポアソン方程式には, 任意のパラメータ α を用いる必要がある. そのため, 本解析を行う前のプリプロセスとして簡易のモデルを作成し, 解析を行うことでこのパラメータを決定することとした. そのモデルは, 圧力値が理論的に予測できる静水圧問題とし, 図-3にはその諸元を示す.

なお, プリプロセスの解像度は本解析の解析条件に合わせ, 初期の粒子間隔は $d_0 = 0.01\text{m}$ とし, 時間ステップも本解析と同様に $d_0 = 0.01\text{m}$, $\Delta t = 0.0005$ の2パターンを本研究では行っている. 理論値と図-3に示す水槽底面の境界粒子の圧力値を比較し, 緩和パラメータを決定する.

図-4には時間ステップを $\Delta t = 0.001$ とした場合の緩和パラメータによる解析値をグラフ化した. 同図をみると事前解析に用いたモデルは, 水深が50cmであるため, 水槽底面の静水圧の理論値は4900Paと整合す

る緩和パラメータは $\alpha = 0.025$ である. しかしながら理論値に近づけるために, ある程度のパラメータを与えると理論値に近づく傾向にあるが, それと同時に圧力の虚偽な数値振動が顕著となりこれ以上のパラメータを用いた場合は粒子が発散してしまう結果となった.

また, 図-5には緩和パラメータを変えた場合の4秒後の状態図を示しており, 緩和パラメータを低めに設定すると流体の体積自体が減少する傾向にあることが分かる. 逆に, 高めのパラメータを設定した場合には体積の減少は見られないが, 圧力値の分布が滑らかになっていないことが見て取れる.

以上のことから, 圧力値および体積保存性のある程度精度よく満たしている値を用い, 本解析に用いるパラメータ α は, $\Delta t = 0.001$ では0.005, $\Delta t = 0.0005$ の場合は, 0.0013を適正值とした.

以上をまとめると安定化 ISPH 法は, 適切な緩和パラメータを設定することで, 圧力値および体積保存性の両面から高精度な解が期待できることが確認できる.

4.2 3次元水柱崩壊問題の諸元

安定化 ISPH 法の精度検証を行うため, 比較対象とする Kleefsman らによって行われた実験の諸元を図-6に示す. 水柱崩壊の先に設置した障害物には, 図-7に示す場所に8か所の圧力センサが設置されている. 精度検証の対象として, その圧力センサ ps1, ps3, ps5, ps7 の4点の出力値とする. 以降に示す3次元水柱崩壊数値解析は, 前節で示した静水圧事前解析により設定した緩和パラメータの適正值で実施している.

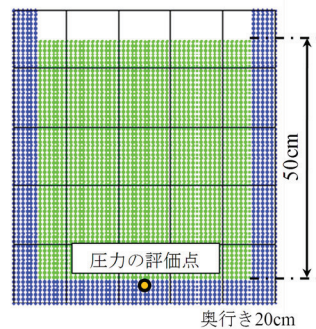


図-3 静水圧問題の諸元

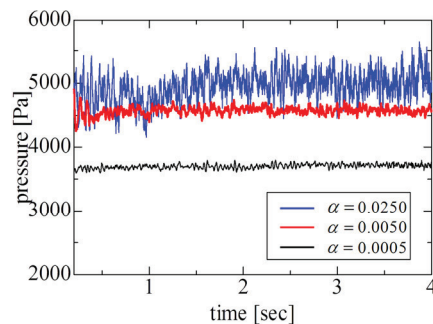


図-4 緩和パラメータの影響

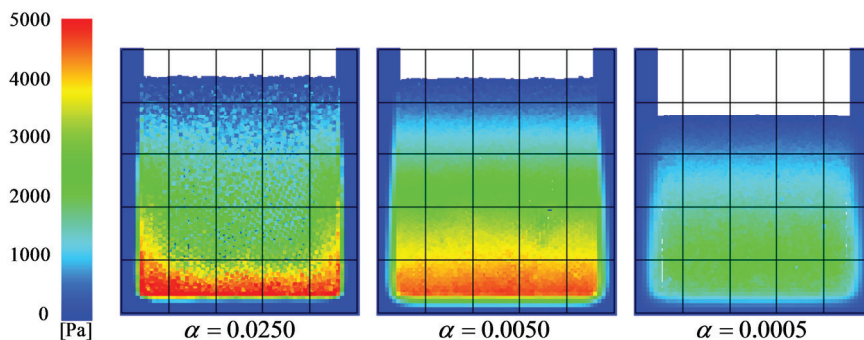


図-5 静水圧問題における体積保存性の検証

4.3 各測定点での圧力の実験値と解析結果の比較

時間増分を細かくすることでより安定した解が得られることが経験的に分かっており、本論文では時間増分 $\Delta t = 0.0005$ 、初期粒子間隔を 0.01m と設定した場合の数値解析結果を中心に報告する。解析モデルは境界粒子(固定粒子)を6層により構成し、流体粒子約67万粒子と合わせて総粒子数140万粒子のモデルとなっている。

流れの各時刻歴変化を図-8に示す。カラーコンタは圧力を示す。水柱崩壊後、約0.42秒で前方の障害物に到達する。その後障害物に衝突して跳ね上がるもしくは障害物側面の流路を通り、右壁面に到達する。このような流体の流れの様子は Kleefsman らの報告と定性的に一致する。

次に、前節で述べた圧力の各観測点(ps1, ps3, ps5, ps7)の実測値と計算結果を比較する。また、従来の Lee ら³⁾による定式化の速度発散ゼロ条件(提案式(27)緩和パラメータ $\alpha = 0$ とした場合と等価)の結果との比較も合わせて行うことで安定化 ISPH 法の緩和パラメータの必要性を議論する。

図-9に各センサ位置における圧力値の比較を示す。両手法とも流体が障害物に衝突した直後の圧力値、発現時刻ともにより一致を示している。しかし衝突後の圧力値は、速度発散ゼロ条件の場合、全体的に実測値よりも低い値をとる。これは体積保存性が成立していないためと考えられる。一方で、安定化 ISPH 法は衝突後も実測値と比較的良好に一致しており、緩和パラメータを用いることの有効性を確認することができる。

ps1, ps3については、2回目のピークとともに比較的良好な結果を示したが、ps5, ps7の結果は、特に1.5秒~2.2秒の間、数値解析結果に虚偽の圧力振動が発現している。これは、跳ね上がった流体と障害物側面の流路を通過した流体が、右壁に衝突したのちに再び結合する区間である。このような自由表面が著しく変化するような激しい流体流れにおいては、圧力の数値振動が見られる。しかしながら、この問題は時間増分を細かくすることで改善される傾向にある。開発した解析ツール(可能な限り OpenMP による並列化は対応済み)では1.7分/ステップ程度の計算時間を費やすため、これ以上細かな時間ステップを刻むことは断念した。さらに時間を細かく刻んだ際の結果についても議論する余地は残るが、なお、振動が減衰したのちには、実測値と同等な圧力値が評価できている。

以上の比較検証から、空間・時間の解像度が十分でない際に虚偽の圧力振動が生じていることを除けば、圧力センサによる実測値と計算値はほぼ同程度の結果が得られている。

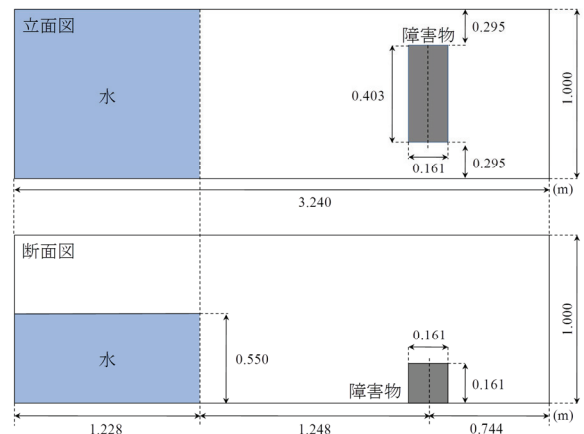


図-6 3次元水柱崩壊モデル

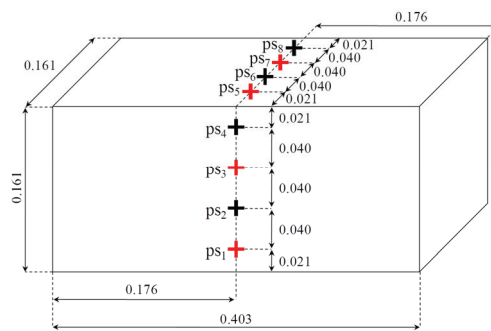


図-7 障害物上の圧力センサの配置

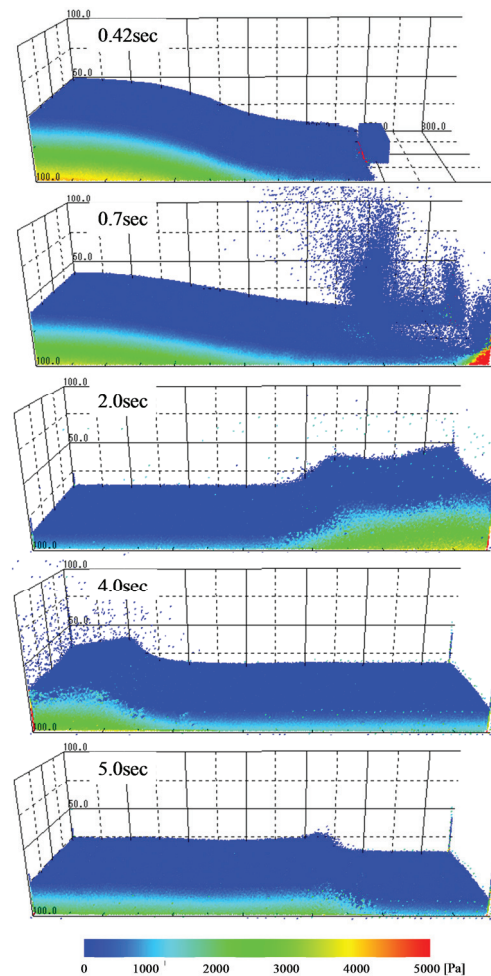


図-8 3次元水柱崩壊解析結果の鳥瞰図

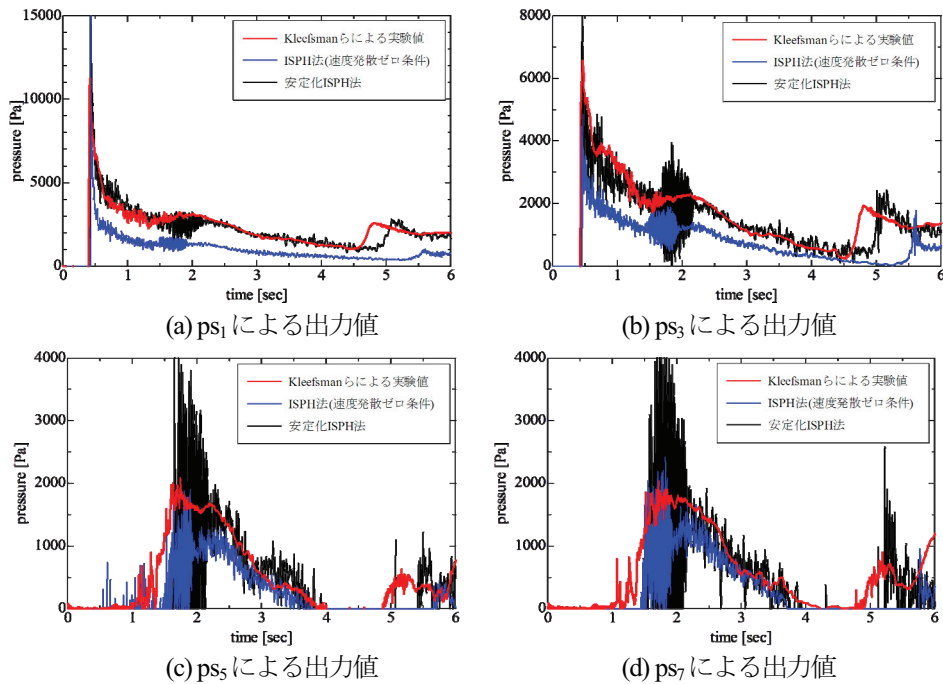


図 - 9 各圧力センサにおける実測値と計算値の比較

5. まとめと今後の課題

本研究では、非圧縮性流体解析用 SPH 法における圧力ポアソン方程式の導出過程について再考することで密度一定条件を緩和した定式化を提案し、その有用性を 3 次元数値解析で検証した。提案手法は、既存の速度発散ゼロ条件、および密度一定条件による定式化の両定式化におけるそれぞれのメリットを併せもち、解析中に全体の体積を保存しながら、かつ安定した圧力分布を得ることができる。

自由表面形が状著しく変化する激しい流れの解析では、空間および時間の解像度が不足すると依然として虚偽の圧力振動が発生する。初期の粒子間隔、あるいは時間ステップを小さくすれば、虚偽の圧力振動が抑制される傾向にあるため、今後は解析途中で精度が低下した領域のみ粒子を細分化する新たなスキーム、あるいは時間ステップをアダプティブに制御するアルゴリズムを構築することが望ましいものと考えられる。また、鑑面境界等の境界条件を採用し、より高精度かつ計算時間の削減を行う予定である。

謝辞

本研究の一部は科研費（若手研究(B)2176036）の助成を受けたものである。また、横浜国立大学・酒井讓教授には SPH 法に関する貴重なアドバイスをいただきました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

1) G.R. Liu, M.B. Liu, Smoothed Particle Hydrodynamic -a meshfree particle method-, World scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003

2) M. Yildiz, R. A. Rook and A. Suleman, SPH with the multiple boundary tangent method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 77, pp. 1416-1438, 2009

3) J.P. Morris, P.J. Fox, and Y. Zhu, Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH, *Journal of Computational Physics*, Vol.136, pp. 214-226, 1997

4) S.J. Cummins and M. Rudman, An SPH projection method, *Journal Computational Physics*, Vol.152(2), pp.584-607, 1999

5) E. S. Lee, C. Moulinec, R. Xu, D. Violeau, D. Laurence and P. Stansby, Comparisons of weakly com-pressible and truly incompressible algorithms for theSPH mesh free particle method, *Journal of Computa-tional Physics*, Vol.227(18), pp.8417-8436, 2008

6) A. Khayyer, H. Gotoh and S. Shao, Corrected incompressible SPH method for urate water-surface tracking in breaking waves, *Coastal Engineering*, Vol.55,pp. 236-250, 2008

7) S. Shao, E.Y.M. Lo, Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian ows with a free surface, *Advances in Water Resources*, Vol.26, pp.787-800, 2003

8) S. Koshizuka and Y. Oka, Moving-Particle Semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nucl. Sci. Phys. Comm.*, Vol. 48, pp.421-434,1996

9) K. M. T. Kleefsman, G. Fekken, A. E. P. Veldman, B.Iwanowski and B. Buchner, A Volume-of-Fluid base-simulation method for wave impact problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 206, pp. 363-393, 2005