

(11) 大規模な動的有限要素解析の高速化に向けた取り組み

Development of a fast dynamic FEM solver for large scale problem

浅井 光輝*, Norliyati M. Amin**, 園田 佳巨***
Mitsuteru ASAI, Norliyati M. Amin, Yoshimi SONODA

- * 九州大学准教授 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)
- ** 九州大学大学院博士課程 国際環境工学特別コース専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)
- *** 九州大学教授 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744)

Key Words : (model order reduction, fast dynamic analysis, transient analysis, harmonic analysis)
キーワード: モデル縮約, 高速動的解析, 過渡応答解析, 周波数応答解析

1. はじめに

数値解析により地震時における橋梁の振動特性を正確に把握するには、たとえば支承部(積層ゴム, ヒンジなど)などのローカルな構造部位までを適切にモデル化し、同時に構造全体のグローバルな挙動を解析することが望ましい。しかしながら、有限要素法によりローカルな部位までを含めて橋梁全体をモデル化すれば、必然的に数百万~数千万要素の解析が必要となり非効率である。そこで通常の構造解析では、梁・トラス要素・ファイバー要素などによる形状の簡易化を行うことで計算効率を向上させている。

本研究では、形状の簡易モデル化を行わず、詳細な有限要素モデルのまま用い振動解析を行なう際に、ある種のモード分解法による高速振動解析法¹⁾を適用することで大幅な計算時間の短縮を目指す。また本稿では、特に衝撃的な荷重を取り扱う際の注意事項についても報告する。

2. Krylov 部分空間によるモデル縮約化法

数学の分野において研究が盛んに行われている Krylov 部分空間によるモデル縮約化法¹⁾(以降、KS-MOR と略)の FEM への適用について概説する。

2.1 動的 FEM による離散化方程式

線形弾性体による動的問題を通常の有限要素法により空間離散化し、以下に示す離散化方程式が得られたものとする。

$$M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = \alpha(t)f \quad (1)$$

ここで $M \in \mathcal{R}^{N \times N}$, $D \in \mathcal{R}^{N \times N}$, $K \in \mathcal{R}^{N \times N}$ は質量行列, 減衰行列, 剛性行列であり, 変位 u の自由度は N とする。ここ

ではレイリー型減衰を用いた。すなわち減衰行列は

$$D = \alpha_R M + \beta_R K \quad (2)$$

として与えるものとした。

2.2 Krylov 部分空間による縮約

行列 $A=DK^{-1}$, $B=MK^{-1}$ とベクトル $r_0=K^{-1}f/\|K^{-1}f\|$, $r_1=Ar_0$, $r_i=Ar_{i-1}+Br_{i-2}$ より定義される 2 次オーダーの Krylov 部分空間を次式により記述する。

$$\mathcal{G}_n(A, B; r_0) = \text{span}\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\} \quad (3)$$

この部分空間は、2 次 Lanzos 法、あるいは 2 次 Amordi 法などにより求められる n 本の直交基底ベクトル q_i が形成する部分空間と一致する^{2),3)}。

$$\mathcal{G}_n(A, B; r_0) = \text{span}\{q_1, q_2, \dots, q_n\} \quad (4)$$

本研究では文献^{4),5)}に従い、2 次 Amordi 法 (SOAR) により直交基底を求めることにした。なお、複数の荷重載荷時⁶⁾, あるいは強制変位問題⁷⁾では、Block 型 SOAR を用いる必要がある。

Algorithm 1: SOAR procedure

1. $q_1 = r_0 = K^{-1}f/\|K^{-1}f\|$
2. $p_1 = 0$
3. for $j=1,2,\dots,n$ do
4. $r = DK^{-1}q_j + MK^{-1}p_j$
5. $s = q_j$
6. for $i=1,2,\dots,j$ do
7. $t_{ij} = q_i^T r$
8. $r := r - q_i t_{ij}$
9. $s := s - p_j t_{ij}$
10. end for
11. $t_{j+1j} = \|r\|$
12. if $t_{j+1j} = 0$, breakdown
13. else
14. $q_{j+1} = r/t_{j+1j}$
15. $p_{j+1} = s/t_{j+1j}$
16. end if
17. end for

規定する n 個の直交基底のみを使い座標変換を実施すれば、離散化方程式は以下に示す小規模な方程式へと変換できる。

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{u}}_n(t) + \mathbf{D}_n \dot{\mathbf{u}}_n(t) + \mathbf{K}_n \mathbf{u}_n(t) = \alpha(t) \mathbf{f}_n \quad (5)$$

ここで $\mathbf{M}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{K}_n$ はそれぞれ $n \times n$ の小行列である。

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_n; \quad \mathbf{D}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_n; \quad \mathbf{K}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K} \mathbf{Q}_n; \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{f}$$

また、 \mathbf{Q}_n^T は Algorithm1 より求められる n 本の直交基底ベクトルを保存した $N \times n$ の行列である。

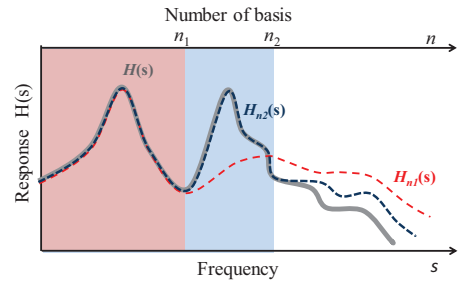


図1. 基底ベクトル数とKS-MORの精度

2.3 KS-MOR 近似の特徴

KS-MOR 近似は、モーメントマッチングという手法により数学的に証明されている⁵⁾⁸⁾。ここでいうモーメントとは、特定の周波数を展開点として周波数領域の応答を展開したときの(サンプリング周波数-展開周波数) × (サンプリング周波数の応答) である。この証明によれば、展開点周辺の n 個 (=基底ベクトル数) のサンプリング点でのモーメントは完全に一致することが示されている。すなわち、展開周波数に近い周波数帯の応答は正確な応答を近似でき、一方で展開周波数からはずれた周波数領域の解の精度は期待できないことを意味している。通常では展開周波数をゼロと設定することが多いため、このときには低周波応答ほど正確な挙動を再現することができる近似解法となる。ただし、サンプリング周波数が具体的にどれだけの間隔に存在するのかが不明であり、誤差が明確に定義できないといった欠点も残されている⁹⁾。

2.4 簡易精度保障付き手順

縮約化した方程式(5)と元の離散化方程式(1)は、行列・未知ベクトルのサイズは異なるものの、形式的には一致する。このため通常の動的FEMと同様に、Newmark- β 法などの時間積分法を持ちこみ動的過渡応答を解析できる。また、周波数応答の近似解法としての利用も可能である。

先に説明したモーメントマッチングといった近似特性を考慮すれば、図1に示すように周波数領域にて計算誤差を計測すればより明白な定義が可能であろう。そして先に周波数応答解析を実施し、信頼性を確保したい周波数帯での計算精度を十分に確保するための基底ベクトル数を決定し、その後に動的過渡応答を実施すれば、簡易的ではあるが精度を保障した解析ができる。図2にはこの簡易精度保障付きのKS-MOR解析手順を示す。ここで設定する基底ベクトル数が少ないことを前提とすれば、小規模問題の過渡応答解析に加えて周波数応答解析を追加実施することは計算負荷上全く問題ないことを付記しておく。

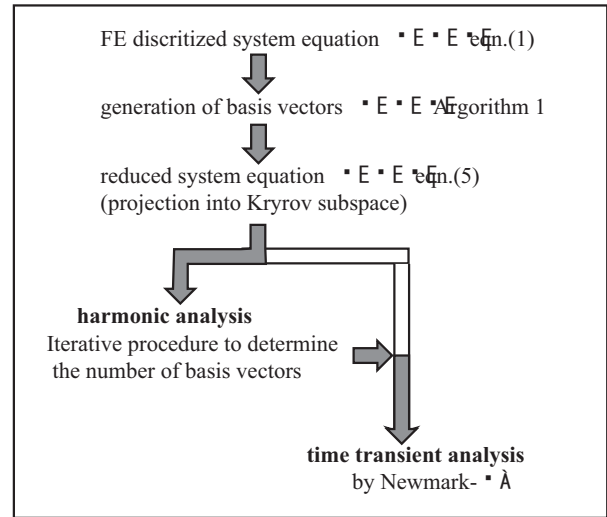


図2. 簡易精度保障付きKS-MOR手順

3. 大規模対策を施したKS-MORによるFEM解析コード

本研究で開発したKS-MORによるFEM解析コードについて解説する。

3.1 反復ソルバーによる省メモリ・効率化

KS-MOR 計算プロセスでは、計算時間の大半を BSOAR による基底ベクトルの計算に費やす (Algorithm1 の 4 行目を参照)。なかでも、連立一次方程式の解法がホットスポット (=計算負荷の高い場所) となっている。そこで、大規模FEMにおいても必要不可欠な技術である反復ソルバー (前処理付き共役勾配法) を適用することで省メモリ化、および計算効率化を図った。また、近年のマルチコア計算機の普及により身近になったメモリ共有型計算機による並列化への対応させた。

3.2 OpenMP による並列計算

FEM コードにおいて省メモリ化を追求すれば、EBE 法 (Element-By-Element 法) のように全体剛性行列を記憶しない手法を選択することになる。しかしその並列化は、特別な配慮をした EBE 法のコードを構築しない限り、データレース (変数の更新もれ) が生じてしまい、良好な計算効率期待できない。そこで、全体剛性行列を Compressed Row Storage 法 (CRS 法) により

記憶させることでデータレースの危険性を回避し、行列ベクトル積の演算を安全かつ高速に並列化する方針とした。

3.3 周波数応答解析における動的配列の使用

図2に示すように、提案する簡易精度保障 KS-MOR の手順では、まずは基底数を見積もるために周波数応答解析を実施する。このとき、基底数を段階的に増加させた際の解の変化を調べることによって誤差を計測し、必要な基底数を決定する。この反復プロセスにおいては、小問題の係数行列等は同じ変数名を用い、不必要となった際には一旦メモリからデータを消去し、無駄なメモリが蓄積されないよう配慮した。

4. 数値計算例

はじめに単純な柱モデルの例題により KS-MOR 法の検証し、支承構造までのモデル化した橋梁全体モデルへの適用例を通して提案手順の有用性を示す。

4.1 荷重周波数特性と基底ベクトル数の関係(周波数応答解析)

図3に示す穴あき柱の上部から鉛直荷重を作用させるといった単純な問題を検証例題とする。ここでは、周波数応答解析結果を通して KS-MOR の近似特性であるモーメントマッチング特性(低周波応答ほど高精度)を数値的に確認する。

周波数応答解析では、基底ベクトルを10個ずつ増加させ、同じ周波数応答問題を解析した。図4には、縮約なしの通常の有限要素解を参照解とし、基底数10, 50, 400と設定した際の KS-MOR の解析結果と比較した。同図より、周波数が大きくなるにつれて解析精度が低下していく傾向が見てとれる。どの基底数のときも、はじめは完全に参照解と一致し、一旦、計算誤差が生じつとその後も継続して誤差を含むことが確認できる。この結果より、基底数10, 50, 400と設定すれば、それぞれ500Hz, 3000Hz, 10000Hz程度までの解は十分な精度で与えられるものと予想できる。つまり、解析時に入力する荷重の振動数、あるいは解析対象に求められる周波数帯が事前に明白に分かれれば、周波数応答解析を先に実施すれば、動的過渡応答解析において要求される基底数を概算できる。

ちなみに、これまでの著者らは、KS-MOR の基底ベクトルは固有ベクトルとモードに関して類似性があることを確認してきた。つまり、KS-MOR は一種のモード分解法であると考えられるため、特に低周波モードが卓越する振動現象であれば比較的少ないモードで近似できることは容易に想像ができる。一方、衝撃問題のように応力波の波動伝搬特性が卓越する問題では、必要な基底数は多くなることが予想できる。

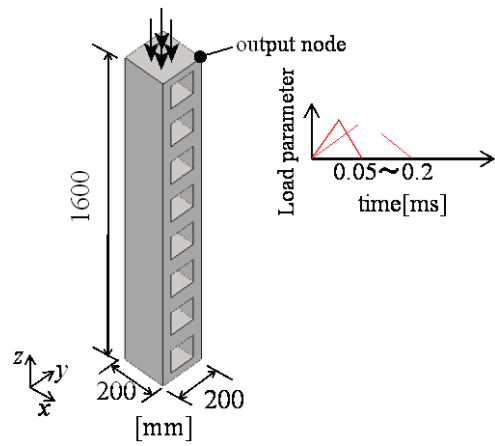


図3. 穴あき柱モデル(検証例題)

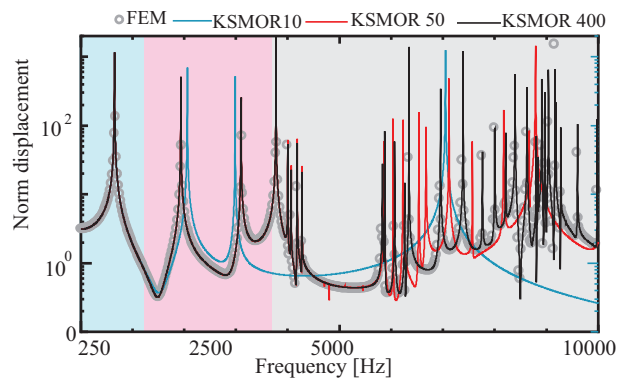


図4. 基底数を変化させたときの周波数応答

4.2 荷重周波数特性と基底ベクトル数の関係(過渡応答解析)

周波数応答解析例より、ある特定の周波数域を超えると急に解析精度が低下するモーメントマッチング特性を確認した。ここでは、動的過渡応答解析における KS-MOR の計算誤差と基底数について議論する。

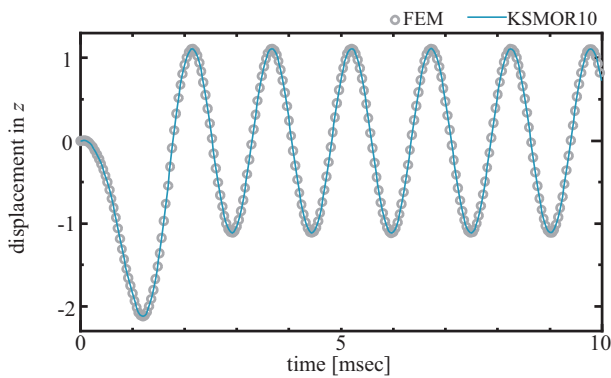
数値解析例では、図3に示す荷重ベクトルの時間変動(比例載荷・比例除荷)を与えた。そして、載荷時間を2ms, 0.02ms, 0.05msと段階的に減少させることで、振動現象から衝撃現象までを想定した問題を設定した。

図5には、載荷時間を変化させたときの出力点におけるz方向変位の時刻歴応答結果を示す。また同図には、縮約なしの有限要素解を参照解として示し、KS-MOR の解と比較している。

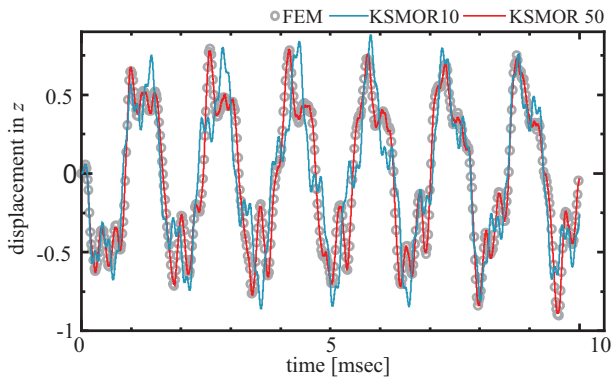
載荷時間の異なる3つ荷重入力値を周波数に換算するとそれぞれ、250Hz, 2500Hz, 10000Hzとなる。先の周波数応答解析からは、基底数を10, 50, 400と選択すれば、それぞれ500Hz, 3000Hz, 10000Hzまでの周波数応答は再現できるものと予想した。この予測結果と併せて図5に示す過渡応答解析結果を見てみる。載荷時間 $T=2ms$ の時には、基底10まで与えれば参照解とまったく差のない結果が与えられている。同じ荷重パターンを用いていても、載荷時間を10分の1

(0.2ms) とすれば基底数は 10 では不足し、50 程度まで増加しなければいけないといった結果であった。同様に、荷重時間を $T=0.05\text{ms}$ まで減少させれば、約 400 程度の基底が必要であった。以上、動的過渡応答解析で必要となる基底数は、周波数応答解析から予想した基底数と一致している。

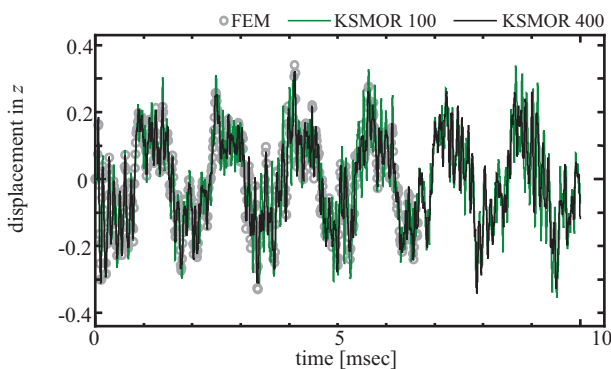
図 6 には、荷重荷重時間 $T=0.2\text{ms}$ 時の応力伝播の様子を示している。紙面上では相違が確認できないほど FEM と KSMOR50 の結果は類似しているため、ここでは代表して KSMOR50 の結果のみを表示し、KSMOR10 の結果と比較している。荷重時間 $T=0.2\text{ms}$ 程度に設定すれば、応力の波動伝搬性が生じてくることが確認できる。また応力の波動伝搬性が強くなるほど、基底数を増加しなくてはならない傾向がある。



(a) 荷重時間 $T=2\text{ms}$

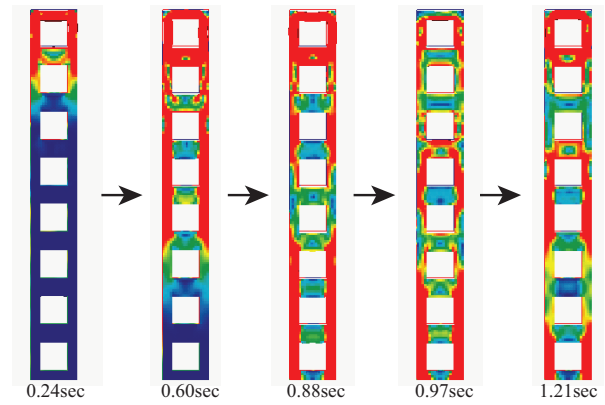


(b) 荷重時間 $T=0.2\text{ms}$

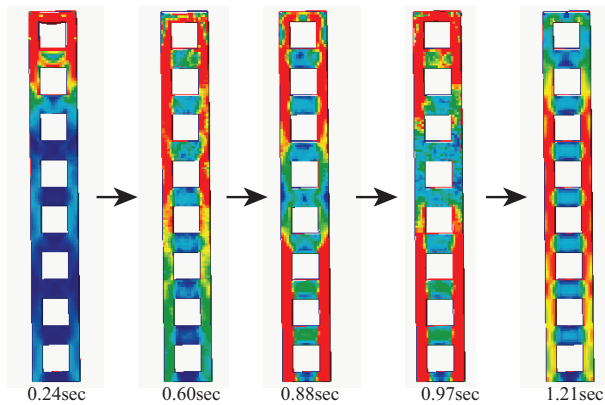


(c) 荷重時間 $T=0.05\text{ms}$

図 5. 穴あき柱モデル上端での鉛直変位



(a) FEM and KSMOR50



(b) KSMOR10

図 6. ミーゼス応力コンター図(荷重時間 $T=0.2\text{ms}$)

以上、ここで示したすべてのケースにおいて KSMOR は参照解とほぼ同程度の結果が得られた。また必要となる基底数は、周波数応答解析で見積もった基底数と対応しており、提案する簡易精度保障付き KS-MOR 解析手順は十分に有効であるものと期待できる。

4.3 簡易精度保障付き手順による大規模問題解析例

先の検証例題は、単一材料からなる単純な構造問題であった。ここでは、より一般的な問題へ提案手順を適用しその有効性を検証する。

支承構造の異なる 2 つの橋梁全体解析モデルを検証例題として設定した。図にはゴム支承、ヒンジ支承構造の詳細を示し、モデル化に使用した物性値を表 1 にまとめて示す。また、橋脚および橋台要素の下面を強制変位節点とし、強軸直角方向へ同一な強制変位(周期 0.1s, 振幅 0.1mm)を与えた。

表 1 各材料の物性値

	young's module [Gpa]	poisson's ratio [-]	density [kg/m ³]
steel	210	0.30000	7874
rubber	0.01	0.49999	910
concrete	30	0.16666	2300

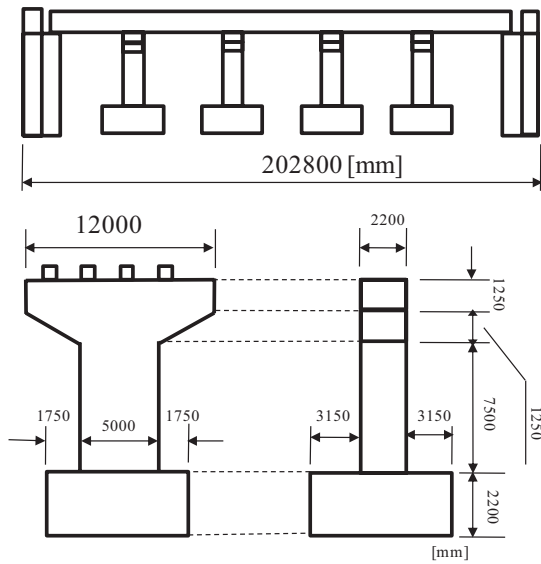
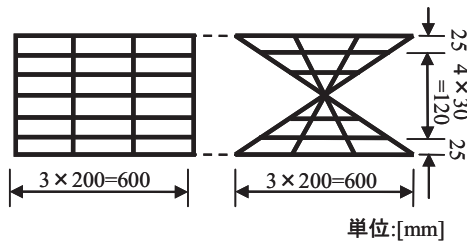
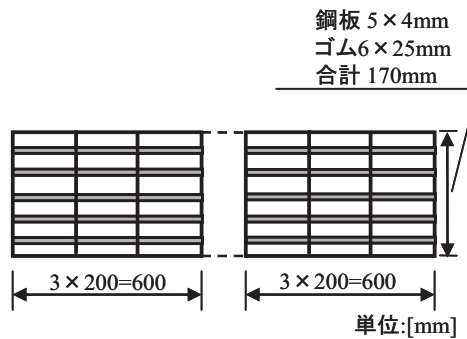


図 7. 橋梁全体モデルの概略図



(a) ヒンジ支承のモデル化



(b) 積層ゴム支承のモデル化

図 8. 支承構造の有限要素モデル

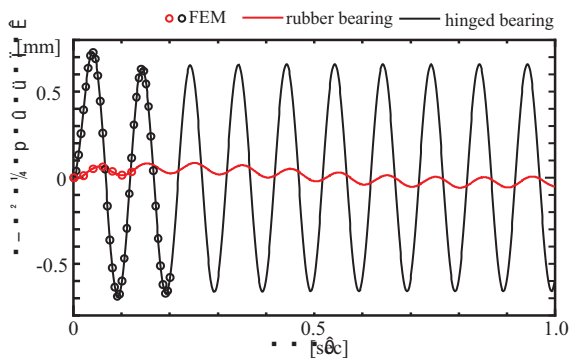


図 9. 各支承構造における変位応答の相違

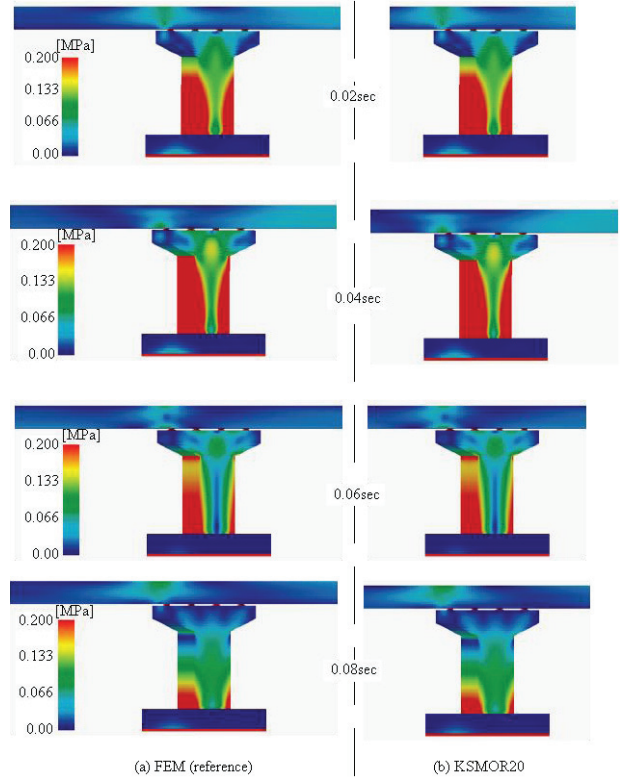


図 10. ヒンジ支承モデル時のミーゼス応力分布

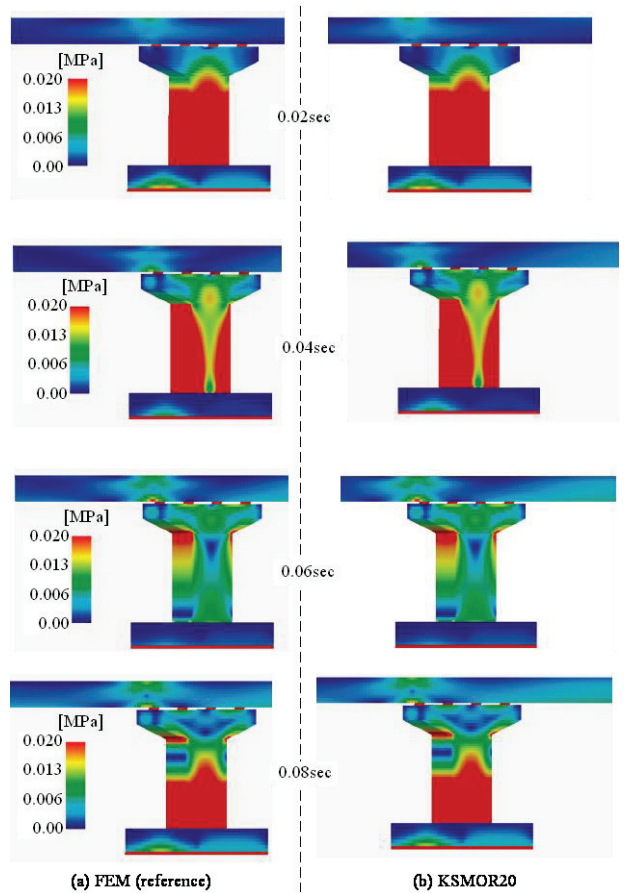


図 11. ゴム支承モデル時のミーゼス応力分布

図9には、桁中央上部での強軸直角方向変位を示す。同図では、ヒンジ支承、積層ゴム支承ともにFEM結果と比較し、基底20本によるKS-MORによる結果を示している。各モデルは約39万要素、総自由度約140万の問題であるが、両者ともわずか20自由度にも関わらず誤差が確認できないほど高精度な近似ができています。また図10、図11には、両モデルの応力分布の推移を示しているが、図9に示す特定点の変位だけでなく、全体の応力分布までの確に近似ができています。

最後に計算効率について整理する。KS-MORによるFEMの縮約化解析では、1つの直交基底ベクトルを求めるために、FEM解析の総自由度数の連立一次方程式を2回解く必要がある。また、必要となる基底数は、問題の形状、あるいは解析の際に精度を期待したい周波数帯にも依存するため特定は困難であるが、これまでの経験から、例えば地震時挙動を想定した構造解析であれば100程度の基底もあれば十分である。このため、200ステップ以上を解析する動的過渡応答解析、あるいは周波数応答解析であれば、本縮約化解析は効率化が可能であり、例えば2000、4000時間ステップの解析であれば、それぞれ10~20倍程度の高速化が期待できる。具体的に、ここで示した橋梁の例題では3000時間ステップの解析では、通常のFEM解析によれば2、3週間程度を要したのに対し、KS-MORでは2日程度で解析が終了した。

5. おわりに

本研究では、Krylov部分空間を利用したKS-MOR法に着目し、大規模FEM解析の高速化を検証した。開発ツールは、大規模解析を想定したコードとなっており、省メモリ化かつ並列計算による高速化についても検討した。また、KS-MOR法ではユーザが必要となる基底数を入力する必要があるが、近似の特性であるモーメントマッチングの性質を活かし、まずは周波数応答解析から精度保障に必要な基底数を決定する手順を提案した。そして、数値解析例を通して提案手法の有用性を示すことができた。

今後は、基底数の自動選択の信頼性確保と適用範囲の拡張が必要である。ちなみに、現在の理論では線形弾性問題しか扱うことができない。材料非線形問題まで対応させるには、より一般的な理論を構築する、あるいは現在の理論の有効活用を検討する必要がある。

謝辞

本研究の一部は科研費(若手研究(B)2176036)の助成を受けたものである。また、慶應義塾大学・高野直樹教授、およびフライブルク大学・Jan G. Korvink教授にはKS-MORに関する研究機会を与えていただきました。

参考文献

- 1) Antoulas, A. C., Sorensen, D. C., and Gugercin S., A survey of model reduction methods for large scale systems. Contemporary Mathematics, AMS Publications, 280, pp. 193-219, 2001
- 2) Bai Z. J., Krylov subspace techniques for reduced order modeling of large scaled dynamical systems. J. Appl. Numer. Math., Vol. 43, pp. 9-44, 2002
- 3) Evgenii B. R., Konvink J. G., Review: Automatic Model for Transient Simulation of MEMS-based Devices, Sensor Update, Vol 11, Issue 1, pp. 3-33, 2002
- 4) Bai Z. J., Su Y. F., Second Order Krylov Subspace and Arnoldi Method, Journal of Shanghai University(English Edition), Vol 8 Part 4, pp. 378-390, 2004
- 5) Bai Z. J., Su Y. F., Dimension reduction of large-scale second order dynamical systems via a second order Arnoldi Method, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 26, No. 5, pp. 1692-1709, 2005
- 6) Lin Y., Bao L., Wei Y., Model-order reduction of large scale second order MIMO dynamical systems via a block second-order Arnoldi method, Int. J. of Comp. Math., Vol 84, No. 7, pp. 1003-1019, 2007
- 7) Norliyati Mohd Amin, Mitsuteru Asai, Yoshimi Sonoda, Fast transient structural FE analysis imposing prescribed displacement condition by using a model order reduction method via Krylov subspace, Journal of Applied Mechanics, Vol. 13, pp.159-167, 2010
- 8) Salimbahrami B., Lohmann B, Krylov subspace methods for the reduction of first and second order large scale system, Proc. of 8th DFMR Conf. Bremen, Germany, pp. 236-251, 2004
- 9) Bai Z. J., Ye Q., Error estimation of the Pad'e approximation of transfer functions via the Lanczos process, Electron. Trans. Numer. Anal., 7, pp. 1-17, 1998